Exercice. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice A.
2. La matrice A est-elle inversible ? Diagonalisable ?
3. Déterminer le polynôme minimal de A.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$. En déduire la matrice A^n.

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$

1. On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans $\mathbb{K}^n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que le résultat précédent est faux dans $\mathbb{Q}^N$.

Exercice. Nous considérons les deux équations différentielles suivantes :

$$(H) 2xy' - 3y = 0, \quad (E) 2xy' - 3y = \sqrt{x}.$$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Exercice. Soit X_n, Y_n deux variables aléatoires discrètes indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. On considère les variables aléatoires Z_n et T_n définies par

$$Z_n = |X_n - Y_n|, T_n = \min(X_n, Y_n).$$

1. Déterminer $\mathbb{E}(Z_n)$ puis en donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer $\mathbb{E}(T_n)$ puis en donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice. On considère $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3. On lance simultanément les n boules. Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules. On note X_n la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire X_n.
2. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(X_n = k)$ pour toutes les valeurs possibles k de X.
3. Déterminer $\mathbb{E}(X_n)$.
4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$ et interpréter le résultat.

Exercice. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in End(E)$. Le but est de cet exercice est de montrer qu'il existe $v \in End(E)$ tel que $u \circ v = 0$ et $u + v$ soit inversible, si et seulement si

$$E = ker(u) \oplus Im(u).$$

1. On suppose qu'il existe $v \in End(E)$ tel que $u \circ v = 0$ et $u + v \in GL(E)$.
   (a) Montrer que $Im(v) = ker(u)$.
   (b) En déduire que $E = Im(u) \oplus ker(u)$.
2. Démontrer le sens réciproque.