Exercice. Etude préalable

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 2 de racines α et β. Exprimer la racine de P' en fonction de α et β.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n. Que peut-on dire de la racine de $P^{(n-1)}$?

Corrigé.

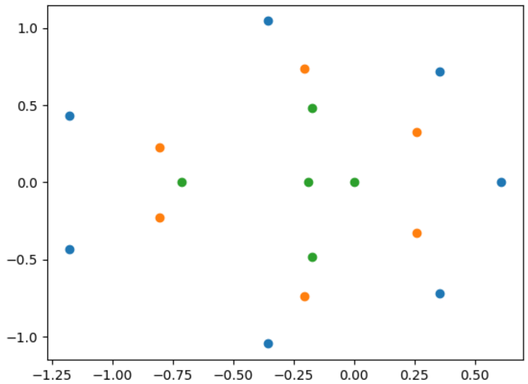
1. Nous avons
$$P = c(X-\alpha)(X-\beta) = cX^2 - c(\alpha+\beta)X + c\alpha\beta.$$
Donc
$$P' = 2cX - c(\alpha+\beta).$$
Ainsi la racine de P' est donnée par $\frac{\alpha+\beta}{2}$.
2. On écrit
$$P = c\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k).$$
Alors
$$P = cX^n - c\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)X^{n-1} + Q,$$
avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-2$. Ainsi
$$P^{(n-1)} = cn!X - c(n-1)!\sum_{k=1}^{n}\alpha_k.$$
Donc la racine de $P^{(n-1)}$ est donnée par
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k.$$

Exercice. Partie Python

1. Ecrire une fonction Python qui prend en variable un polynôme et renvoie la représentation de ses racines dans le plan complexe.
2. Ecrire une fonction Python qui prend en variable un polynôme et renvoie la représentation des racines de P et de ses dérivées. Pour n'afficher les racines qu'à la demande de l'utilisateur, on pourra utiliser la fonction plt.waitforbuttonpress().
3. Que peut-on conjecturer sur l'enveloppe complexe des racines du polynômes et de ses dérivées ?

Corrigé.

```python
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from numpy.polynomial import Polynomial

P = Polynomial([-3, 2, 0, 1,4, 6, 7, 4])

#Question 1

def racine(P):
    x = [P.roots()[i].real for i in range(len(P.roots()))]
    y = [P.roots()[i].imag for i in range(len(P.roots()))]
    plt.scatter(x,y)
    plt.show()

#Question 2

def racineiterees(P):
    n = P.degree()
    x = [P.roots()[i].real for i in range(len(P.roots()))]
    y = [P.roots()[i].imag for i in range(len(P.roots()))]
    plt.scatter(x,y)
    plt.waitforbuttonpress()
    Q = P
    for i in range(n):
        Q = Q.deriv()
        x = [Q.roots()[i].real for i in range(len(Q.roots()))]
        y = [Q.roots()[i].imag for i in range(len(Q.roots()))]
        plt.scatter(x,y)
        plt.waitforbuttonpress()
```



Nous pouvons conjecturer que les enveloppes convexes sont décroissantes pour l'inclusion.

Exercice. Partie théorique

1. On considère $(z_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{C}^*)^n$. Montrer que 0 est barycentre à coefficients positifs des $(z_i)_{1\leq i\leq n}$ si et seulement s'il l'est des $\left(\frac{1}{z_i}\right)_{1\leq i\leq n}$.
2. On considère $\varphi : \mathbb{C}_n[X]\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}_p[X]$ définie par
$$\forall P \in \mathbb{C}_p[X]\backslash\{0\}, \varphi(P) = \frac{P'}{P}.$$
Montrer que l'application φ transforme les produits en sommes.
3. En déduire la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.
4. Démontrer le théorème de Gauss-Lucas : toute racine de P' est combinaison convexe des racines de P.

Corrigé.

1. On suppose que 0 est barycentre à coefficients positifs des $(z_i)_{1\leq i\leq n}$: il existe $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que
$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i.$$
Alors, comme les λ_i sont réels et les z_i non nuls,
$$0 = \overline{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{z_i}\frac{z_i}{z_i} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i |z_i|^2}_{=:\mu_i\in\mathbb{R}_+} \frac{1}{z_i} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{1}{z_i}.$$

Ce qui montre que 0 est barycentre à coefficients positifs des $\left(\frac{1}{z_i}\right)_{1\leq i\leq n}$. Réciproquement on applique ce qui précède avec la famille $\left(\frac{1}{z_i}\right)_{1\leq i\leq n}$ pour obtenir que 0 est barycentre à coefficients positifs des $(z_i)_{1\leq i\leq n} = \left((z_i^{-1})^{-1}\right)_{1\leq i\leq n}$.

2. Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{C}_n[X]\backslash\{0\}$. Alors

$$\varphi(P_1P_2) = \frac{(P_1P_2)'}{P_1P_2} = \frac{P_1'P_2 + P_1P_2'}{P_1P_2} = \frac{P_1'}{P_1} + \frac{P_2'}{P_2} = \varphi(P_1) + \varphi(P_2).$$

3. On écrit la décomposition en produits d'irréductibles du polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$:

$$P = c\prod_{k=1}^{m}(X-\alpha_k)^{\nu_k}.$$

Alors la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ est donnée par

$$\frac{P'}{P} = \varphi(P) = \varphi(c) + \sum_{k=1}^{m}\nu_k\varphi(X-\alpha_k) = 0 + \sum_{k=1}^{m}\frac{\nu_k}{X-\alpha_k}.$$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$ racine du polynôme dérivée P'. Si z est racine du polynôme P alors z est combinaison convexe triviale des racines P. Sinon, d'après ce qui précède,

$$0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\nu_k}{z-\alpha_k} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\nu_k}{|z-\alpha_k|^2}(\overline{z}-\overline{\alpha_k}),$$

i.e.

$$0 = \overline{0} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\nu_k}{|z-\alpha_k|^2}(z-\alpha_k),$$

i.e.

$$z = \frac{\sum_{k=1}^{m}\frac{\nu_k}{|z-\alpha_k|^2}\alpha_k}{\sum_{k=1}^{m}\frac{\nu_k}{|z-\alpha_k|^2}}.$$

Donc z est bien combinaison convexe de racines de P.

Exercice.

Corrigé.