Transformation de Fourier dans L^2 et théorème de Plancherel

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li

Leçons.

1. 205 Espaces complets, exemples et applications
2. 207 Prolongements de fonctions, exemples et applications
3. 208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues, exemples
4. 234 Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables
5. 235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales
6. 239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre, exemples et applications
7. 250 Transformation de Fourier, applications

Proposition. Soit $A(\mathbb{R}) = \{f \in L^1(\mathbb{R}), \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})\}$, alors $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_2$.

Démonstration.
Etape 1 : $A(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$
Soit $f \in A(\mathbb{R})$, alors, comme $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f \circ (-id_{\mathbb{R}}))) \in C_0(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$, puis, par inversion de Fourier

$$f = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f \circ (-id_{\mathbb{R}}))) \in L^\infty(\mathbb{R})$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq \|f\|_\infty \|f\|_1 < +\infty$$

Donc $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
Etape 2 : $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$
On considère $P : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & e^{-2\pi|y|} \end{array} \in L^1(\mathbb{R})$, et $p = \mathcal{F}(P) = \frac{1}{\pi(1+id_{\mathbb{R}}^2)}$.
Alors

$$\int_{\mathbb{R}} p(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi}[arctan(\xi)]_{-\infty}^{+\infty} = 1, 0 \leq p \leq 1$$

Donc, d'après le théorème des unités approchées, en considérant $p_a = \frac{1}{a}\left(p \circ \frac{id_{\mathbb{R}}}{a}\right)$, on a, pour $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$f * p_a \xrightarrow[a\to 0]{L^2(\mathbb{R})} f$$

Puis si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors

$$f * p_a \in L^1(\mathbb{R}), \mathcal{F}(f * p_a) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(p_a) = \underbrace{\mathcal{F}(f)}_{\in C_0(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})} P(a id_{\mathbb{R}}) \in L^1(\mathbb{R})$$

D'où $f * p_a \in A(\mathbb{R})$, ce qui montre que $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

<u>Etape 3 : $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$</u>

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors on considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n = f \times \mathbb{1}_[- n, n]$, donc :

- Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f_n \in L^2(\mathbb{R})$.
- De plus $f_n \in L^2([-n, n]) \subset L^1([-n, n]) \subset L^1(\mathbb{R})$ car $[-n, n]$ est de mesure finie.
- $\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} |f(x)|^2 dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(\mathbb{R})} f$$

Ce qui montre que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. □

Théorême. La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ se prolonge de façon unique en un automorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration.

<u>Etape 1 : Prolongement de $\mathcal{F}$</u>

On a

$$\mathcal{F} : A(\mathbb{R}) \longrightarrow A(\mathbb{R})$$

En effet soit $f \in A(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$.

Puis pour calculer $\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) \underbrace{\overline{\mathcal{F}(f)(\xi)}}_{=\mathcal{F}(\overline{f}\circ(-id_{\mathbb{R}}))(\xi)} d\xi$, nous allons avoir besoin du lemme suivant :

Lemme. Soit $(f, g) \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}(g)(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi)g(\xi)d\xi$$

Démonstration. On a, par le théorème de Fubini-Tonnelli

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(\xi)e^{-2i\pi x\xi}| d\xi dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx \int_{\mathbb{R}} |g(\xi)|d\xi = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty$$

Donc, d'après le théorème de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}(g)(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{\mathbb{R}} g(\xi)e^{-2i\pi x\xi} d\xi dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi)g(\xi)d\xi$$

□

Ainsi, en appliquant ce lemme et l'inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x) \underbrace{\mathcal{F}(\mathcal{F}(\overline{f} \circ (-id_{\mathbb{R}})))(x)}_{=\overline{f(x)}} dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

Donc

$$\mathcal{F}(f) \in A(\mathbb{R}), \|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$$

Ainsi $\mathcal{F} : A(\mathbb{R}) \longrightarrow A(\mathbb{R})$ est continue pour la norme $\|\cdot\|_2$, puis, par densité de $A(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et complétude de $L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique en un morphisme isométrique (en particulier injectif) de $L^2(\mathbb{R})$ dans $A(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ que nous notons également

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

<u>Etape 3 : Surjectivité de $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$</u>

On a $\mathcal{F} : A(\mathbb{R}) \longrightarrow A(\mathbb{R})$ surjectif car si $g \in A(\mathbb{R})$ alors, par inversion de Fourier et car $\mathcal{F}(g \circ (-id_{\mathbb{R}})) \in A(\mathbb{R})$,

$$g = \mathcal{F}(\mathcal{F}(g \circ (-id_{\mathbb{R}})))) \in \mathcal{F}(A(\mathbb{R}))$$

D'où

$$A(\mathbb{R}) = \mathcal{F}(A(\mathbb{R})) \subset \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$$

Puis

$$\overline{A(\mathbb{R})} \subset \overline{\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))}$$

avec $\overline{A(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R})$ par densité.
De plus

$$\overline{\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))} = \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$$

En effet soit $g \in \overline{\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))}$, alors il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ tel que

$$g_n \underset{n\to+\infty}{\overset{L^2(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} g$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ tel que

$$g_n = \mathcal{F}(f_n)$$

Or $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $L^2(\mathbb{R})$, donc est de Cauchy, puis, comme $\mathcal{F}$ est une isométrie, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$ complet, ainsi il existe $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que

$$f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{L^2(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} f$$

Puis, par continuité de $\mathcal{F}$ et unicité de la limite,

$$g = \mathcal{F}(f) \in \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$$

$\square$