Déterminant circulant et suite de polygones

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre de Xavier Gourdon (pour le théorème)
2. L'oral à l'agrégation de mathématiques de Isenmann et Pecatte (pour l'application)

Leçons.

1. 152 Déterminants, exemples et applications
2. 181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité, applications
3. 191 Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie

Théorème. Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$, alors

$$det(A) = det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} Q(\omega^i)$$

Avec $Q = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_{i+1} X^i$ et $\omega = exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

Démonstration. On considère

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or $\forall k \in [\![0, n-1]\!], J^k = \begin{pmatrix} (0) & I_{n-k} \\ I_k & (0) \end{pmatrix}$, donc

$$Q(J) = \sum_{k=1}^{n} a_k J^{k-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix} = A$$

De plus on a $J^n = I_n$, d'où $X^n - 1$ annule J et est scindé à racines simples, donc J se diagonalise en $\Omega = diag(1, \omega, ..., \omega^{n-1})$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
Ainsi $Q(J)$ se diagonalise en $diag(Q(1), Q(\omega), ..., Q(\omega^{n-1}))$.
Par conséquent

$$det(A) = \prod_{i=0}^{n-1} Q(\omega^i)$$

$\square$

Application. On considère la suite $(P^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^n)^{\mathbb{N}}$ définie par $P^{(0)} = {}^t(z_1^{(0)}, ..., z_n^{(0)}) \in \mathbb{C}^n$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, P^{(k+1)} = {}^t\left(\frac{z_1^{(k)} + z_2^{(k)}}{2}, ..., \frac{z_{n-1}^{(k)} + z_n^{(k)}}{2}, \frac{z_n^{(k)} + z_1^{(k)}}{2}\right)$$

Alors

$$P^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} {}^t(g, ..., g)$$

Avec $g = Isobar(z_1^{(0)}, ..., z_n^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_0^{(0)}}{n}$.

Démonstration.

Remarquons que $\forall k \in \mathbb{N}, P^{(k+1)} = AP^{(k)}$ avec $A = \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ matrice circulante associée à $(a_1, ...a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, ..., 0\right)$, d'où, par récurrence immédiate,

$$\forall k \in \mathbb{N}, P^{(k)} = A^k P^{(0)}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lambda I_n - A = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) I_n - \frac{1}{2}J$ est la matrice circulante associée à $(a_1, ..., a_n) = \left(\lambda - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, ..., 0\right)$.
Ainsi, d'après le lemme précédent,

$$det(\lambda I_n - A) = \prod_{j=0}^{n-1} Q(\omega^j)$$

Avec $Q = -\frac{1}{2}X + \lambda - \frac{1}{2} = \lambda - \frac{1}{2}(1 + X)$.
D'où

$$det(\lambda I_n - A) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\lambda - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\omega^j\right) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\lambda - \frac{1 + \omega^j}{2}\right)$$

Par conséquent les n valeurs propres distinctes de A sont les $\frac{1+\omega^j}{2}$ pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, d'où A est diagonalisable, ie il existe $R \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$$A = RDR^{-1}$$

Avec $D = diag(\lambda_0, ..., \lambda_{n-1})$ et $\forall j \in [\![0, n-1]\!], \lambda_j := \frac{1+\omega^j}{2}$.
Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = RD^kR^{-1} = Rdiag(\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k)R^{-1}$$

D'où

$$A^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} Rdiag(1, 0, ..., 0)R^{-1}$$

Car $\forall j \in [\![1, n-1]\!], |\lambda_j| = \left|\frac{1+\omega^j}{2}\right| = \left|e^{\frac{ij\pi}{n}} \frac{e^{\frac{ij\pi}{n}} + e^{-\frac{ij\pi}{n}}}{2}\right| = \left|cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)\right| < 1$ et $\lambda_0 = 1$.
Par conséquent, par continuité du produit matriciel,

$$P^{(k)} = A^kP^{(0)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} Rdiag(1, 0, ..., 0)R^{-1}P^{(0)} =: P^\infty$$

Ainsi, en faisant tendre k vers $+\infty$ dans $P^{(k+1)} = AP^{(k)}$, on obtient par continuité du produit matriciel,

$$AP^\infty = P^\infty$$

ie P^∞ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
Or $E_1(A)$ est une droite vectorielle de $\mathbb{C}^n$ et $(1, ..., 1) \in E_1(A)$, donc il existe $g \in \mathbb{C}$ tel que

$$P^\infty = (g, ..., g)$$

Puis par associativité du barycentre

$$Isobar(P^{(k+1)}) = Isobar(P^{(k)}) = ... = Isobar(P^{(0)})$$

Et donc

$$g = Isobar(g, ..., g) = Isobar(P^\infty) = ... = Isobar(P^{(k)}) = ... = Isobar(P^{(0)})$$

Le passage à la limite étant justifié par la continuité de l'application $(z_1, ..., z_n) \longmapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{z_k}{n}$ $\square$