Théorème de projection sur un convexe fermé non vide

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li

Leçons.

1. 205 Espaces complets, exemples et applications
2. 213 Espaces de Hilbert, bases hilbertiennes, exemples et applications
3. 219 Extremums : existence, caractérisation, recherche, exemples et applications
4. 253 Utilisation de la convexité en analyse

Théorème. Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé non vide de H, alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que

$$d(x, C) = \|x - y\|$$

On dit que $y = p_C(x)$ est la projection de x sur C.
De plus on a la caractérisation suivante, pour $y \in H$,

$$y = p_C(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} y \in C \\ \forall z \in C, Re(\langle x - y, z - y\rangle) \leq 0 \end{cases}$$

Démonstration.
Etape 1 : Existence
On note $d = d(x, C) = \underset{z \in C}{inf} \|x - z\|$.
Par définition d'une borne inférieure, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $z_n \in C$ tel que

$$\|x - z_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}$$

Ainsi, pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, par identité du parallélogramme,

$$2\left(\|x - z_n\|^2 + \|x - z_m\|^2\right) = \|2x - z_n - z_m\|^2 + \|z_n - z_m\|^2 = 4\left\|x - \frac{z_n + z_m}{2}\right\|^2 + \|z_n - z_m\|^2$$

Or C est convexe, donc $\frac{z_n + z_m}{2} \in C$, donc $\left\|x - \frac{z_n+z_m}{2}\right\| \geq d$, ainsi

$$\|z_n - z_m\|^2 \leq 2\left(d^2 + \frac{1}{n} + d^2 + \frac{1}{m}\right) - 4d^2 = 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$$

D'où $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans H complet, donc il existe $y \in H$ tel que

$$z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, z_n \in C$ et C est fermé, donc $y \in C$, ainsi $\|x-y\| \geq d$.
De plus, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la première inégalité, par continuité de la norme, on obtient $\|x-y\| \leq d$, d'où

$$d = \|x-y\|$$

Etape 2 : Unicité

Soit $y' \in C$ tel que $d = \|x-y\|$, alors, par convexité $\frac{y+y'}{2} \in C$, puis, par identité du parallélogramme,

$$4d^2 + \|y-y'\|^2 \leq 4\left\|x - \frac{y+y'}{2}\right\|^2 + \|y-y'\|^2 = 2(\|x-y'\|^2 + \|x-y'\|^2) = 4d^2$$

D'où $\|y-y'\|^2 = 0$, puis $y = y'$, ce qui montre l'unicité voulue.

Etape 3 : Caractérisation

On suppose que $y = p_C(x) \in C$, soit $z \in C$, alors, par convexité de C,

$$\forall t \in [0,1], (1-t)y + tz \in C$$

Donc, pour $t \in [0,1]$,

$$\|x-(1-t)y-tz\|^2 \geq \|x-y\|^2$$

Or, en développant par sesquilinéarité du produit scalaire,

$$\|x-(1-t)y-tz\|^2 = \|x-y+t(y-z)\|^2 = \|x-y\|^2 + t^2\|y-z\|^2 + 2Re(\langle x-y, y-z\rangle)$$

Donc

$$t^2\|y-z\|^2 + 2tRe(\langle x-y, y-z\rangle) \geq 0$$

Ainsi, pour $t \in]0,1]$,

$$t\|y-z\|^2 + 2Re(\langle x-y, y-z\rangle) \geq 0$$

Puis, en faisant tendre t vers 0, on obtient

$$Re(\langle x-y, y-z\rangle) \geq 0$$

Réciproquement soit $y \in C$ tel que $\forall z \in C, Re(\langle x-y, z-y\rangle) \leq 0$, alors

$$\begin{array}{rcl} \|x-z\|^2 & = & \|x-y+y-z\|^2 \\ & = & \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 + 2Re(\langle x-y, y-z\rangle) \\ & \geq & \|x-y\|^2 \end{array}$$

D'où, comme $y \in C$, par unicité du projeté, $y = p_C(x)$. □

Corollaire. On peut considérer l'application

$$p_C : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & C \\ x & \longrightarrow & p_C(x) \end{array}$$

Alors p_C est 1-lipschitzienne, donc continue.

Démonstration. Soit $(x,x') \in H^2$ et $(y,y') = (p_C(x), p_C(x'))$, alors, par caractérisation,

$$\forall z \in C, Re(\langle x-y, z-y\rangle) \leq 0, Re(\langle x'-y', z-y'\rangle) \leq 0$$

Ainsi, pour $z = y'$ et $z = y$, on obtient

$$Re(\langle x-y, y'-y\rangle) \leq 0, \underbrace{Re(\langle x'-y', y-y'\rangle)}_{=Re(\langle y'-x', y'-y\rangle)} \leq 0$$

Puis, en additionnant ces deux inégalités,

$$Re(\langle x-x'+y'-y, y'-y\rangle) \leq 0$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} \|y-y'\|^2 & = & Re(\|y-y'\|^2) \\ & = & Re(\langle y-y', y-y'\rangle) \\ & = & Re(\langle y-x+x-x'+x'-y', y-y'\rangle) \\ & = & \underbrace{Re(\langle y-x+x'-y', y-y'\rangle)}_{\leq 0} + Re(\langle x-x', y-y'\rangle) \\ & \leq & Re(\langle x-x', y-y'\rangle) \\ & \leq & |\langle x-x', y-y'\rangle| \\ & \leq & \|x-x'\| \, \|y-y'\| \end{array}$$

La dernière inégalité étant justifiée par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Ainsi, si $y = y'$ alors $\|y-y'\| = 0 \leq \|x-x'\|$, puis si $y \neq y'$ alors $\|y-y'\| \neq 0$ et

$$\|y-y'\| \leq \|x-x'\|$$

D'où $\|p_C(x) - p_C(x')\| \leq \|x-x'\|$, ce qui montre que p_C est 1-lipschitizienne, donc continue.
□

Corollaire. (S'il reste du temps) Soit F sous-espace vectoriel fermé de H, alors p_F est linéaire et pour $x, y \in H$, on a la caractérisation

$$y = p_F(x) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \in F \\ x-y \in F^\perp \end{array} \right.$$

Démonstration.
<u>Etape 1 : Si $y \in F$ tel que $x-y \in F^\perp$ alors $y = p_F(x)$</u>
On a, comme $x-y \in F^\perp$ et $y \in F$,

$$d(x,F)^2 = \underset{z\in F}{inf} \|x-z\|^2 = \underset{z\in F}{inf}(\|x-y\|^2 + \|y-z\|^2) = \|x-y\|^2$$

D'où $y = p_F(x)$.
<u>Etape 2 : Réciproquement si $y = p_F(x)$ alors $y \in F$ et $x-y \in F^\perp$</u>
Or, par caractérisation de $y = p_F(x)$, on a $y \in F$ et

$$\forall z \in F, Re(\langle x-y, z-y\rangle) \leq 0$$

De plus, F est un sous-espace vectoriel de H, donc $\forall(\lambda, w) \in \mathbb{K} \times F, y + \lambda w \in F$.
Donc, en particulier pour $\lambda \in \{1, -1, i, -i\}$, on obtient, pour tout $w \in F$,

$$Re(\langle x - y, w\rangle) = Re(\langle x - y, y + \lambda w - y\rangle) \leq 0$$

$$-Re(\langle x - y, w\rangle) = Re(\langle x - y, -w\rangle) = Re(\langle x - y, y - w + y\rangle) \leq 0$$
$$Im(\langle x - y, w\rangle) = Re(\langle x - y, iw\rangle) = Re(\lambda x - y, y + iw - y\rangle) \leq 0$$
$$-Im(\langle x - y, w\rangle) = Re(\langle x - y, -iw\rangle) = Re(\lambda x - y, y - iw - y\rangle) \leq 0$$

D'où $\langle x - y, w\rangle = 0$, ce qui montre que $x - y \in F^{\perp}$.
Etape 3 : Linéarité de p_F
Soit $(\lambda, x, x') \in \mathbb{K} \times H^2$ et $(y, y') = (p_F(x), p_F(x'))$, alors, d'après ce qui précède,

$$(x - y, x' - y') \in (F^{\perp})^2$$

Donc, comme $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de H,

$$\lambda x + x' - \lambda y - y' = \lambda(x - y) + x' - y' \in F^{\perp}$$

avec $\lambda y + y' \in F$ car F est un espace vectoriel.
Donc, par la caractérisation précédente,

$$p_C(\lambda x + x') = \lambda y + y' = \lambda p_C(x) + p_C(x')$$

Ce qui montre la linéarité de p_C. $\square$