Calcul d'une intégrale par un développement en série entière

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Suites et séries de Mohammed El Amrani

Leçons.

1. 235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales
2. 236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables
3. 243 Séries entières, propriétés de la somme, exemples et applications

Théorème. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{ch(x)} dx$ est convergente et

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{ch(x)} dx = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Démonstration.
Etape 1 : Convergence de l'intégrale
Sur $[0, +\infty[$, la fonction $x \longmapsto \frac{x}{ch(x)}$ est continue et

$$\frac{x}{ch(x)} = \frac{2x}{e^x + e^{-x}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{2x}{e^{-x}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

avec $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ intégrable, donc, par théorème de comparaison, $x \longmapsto \frac{x}{ch(x)}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, ce qui montre que l'intégrale est convergente.
Etape 2 : Se ramener une fonction développable en série entière usuelle
On effectue le changement de variable $x = -ln(u)$ qui est bien un C^1-difféomorphisme de $]0, 1]$ dans $[0, +\infty[$ (décroissant), ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{ch(x)} dx = \int_1^0 \frac{-ln(u)}{ch(-ln(u))} \frac{-du}{u} = \int_1^0 \frac{2ln(u)}{e^{-ln(u)} + e^{ln(u)}} \frac{du}{u}$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{ch(x)} dx = \int_1^0 \frac{2ln(u)}{\frac{1}{u} + u} \frac{du}{u} = -2\int_0^1 \frac{ln(u)}{1+u^2} du$$

On écrit alors le développement en série entière de la fonction $\frac{1}{1+u^2}$ sur $]0,1[$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{ch(x)}dx = -2\int_0^1 ln(u)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u^{2n}du = -2\int_0^1 ln(u)du + \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} ln(u)(-1)^{n+1}u^{2n}du$$

<u>Etape 3 : Appliquer une interversion série-intégrale</u>

On considère les fonctions f_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, définie par

$$f_n(0) = 0, f_n(u) = (-1)^{n+1}u^{2n}ln(u)$$

Ainsi $f_n(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc les f_n sont des fonctions continues sur $[0,1]$.
Soit $u \in]0,1[$, alors la série $\sum f_n(u)$ est alternée et vérifie les hypothèses du critère des séries alternées (ou de Leibinz), donc la série numérique $\sum f_n(u)$ est convergente.
On peut donc considérer le reste $R_n(u)$ de cette série, qui vérifie, toujours d'après le critère des séries alternées,

$$|R_n(u)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k+1}u^{2k}ln(u)\right| \leq -u^{2(n+1)}ln(u) = -u^{2n+2}ln(u)$$

On note $g(u) = -u^{2n+2}ln(u)$, alors g est dérivable en u et

$$g'(u) = -(2n+2)u^{2n+1}ln(u) - u^{2n+1} = -u^{2n+1}((2n+2)ln(u)+1)$$

Donc g' s'annule uniquement en $u = e^{-\frac{1}{2n+2}}$, il s'agit bien d'un maximum global de g en calculant sa dérivée seconde ou en remarquant que $\underset{u\to 0,1}{lim}\, g(u) = 0$.
Par conséquent

$$|R_n(u)| \leq \frac{e^{-1}}{2n+2}$$

Ainsi, en passant à la borne supérieure, on obtient $\|R_n\|_\infty \leq \frac{e^{-1}}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $R_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} 0$, ce qui montre que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$, on peut donc intégrer terme à terme :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(u)\right)du = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\int_0^1 u^{2n}ln(u)du$$

Or, par intégrations par parties

$$\int_0^1 u^{2n}ln(u)du = 0 - 0 - \int_0^1 \frac{u^{2n+1}}{2n+1}\frac{1}{u}du = -\frac{1}{2n+1}\int_0^1 u^{2n}du = \frac{-1}{(2n+1)^2}$$

Par conséquent

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{ch(x)}dx = -2\int_0^1 ln(u)du + 2\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(u)\right)du = -2\int_0^1 ln(u)du + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{ch(x)}dx = -2\underset{\varepsilon\to 0}{lim}[uln(u) - u]_\varepsilon^1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = 2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

$\square$