Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$ par la connexité de $SO_n(\mathbb{R})$ ou une partie génératrice de $SO_n(\mathbb{R})$

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Histoires hédonistes de groupes et de géométries tome 1 de Caldero et Germoni (pour le premier théorème)
2. Cours d'algèbre de Daniel Perrin (pour le second théorème)

Leçons.

1. 103 Conjugaison dans un groupe, exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients et applications
2. 108 Exemples de parties génératrices d'un groupe, applications
3. 204 Connexité, exemples et applications

Théorème. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe (à démontrer uniquement pour la leçon 204 Connexité).

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

— Pour $n = 1$: $SO_1(\mathbb{R}) = \{id_{\mathbb{R}}\}$ est connexe, ce qui initialise la récurrence.

— On suppose que $SO_{n-1}(\mathbb{R})$ est connexe pour $n \geq 2$.
Or $SO_n(\mathbb{R})$ agit transitivement sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^n$, donc pour $x \in S$, on a

$$Orb_{SO_n(\mathbb{R})}(x) = S$$

avec S connexe car connexe par arcs.
On a donc par théorème d'homéomorphisme pour $SO_n(\mathbb{R})$ compact

$$SO_n(\mathbb{R})/Stab_{SO_n(\mathbb{R})} \simeq Orb_{SO_n(\mathbb{R})} = S \text{ connexe}$$

Soit $u \in Stab_{SO_n(\mathbb{R})}(x)$, alors $u \in SO_n(\mathbb{R})$ et $u(x) = x$, donc $Vect(x)$ est u-stable, puis comme $u \in SO_n(\mathbb{R})$, $H := Vect(x)^{\perp}$ est u-stable avec $u_{|H} \in SO(H)$. On peut donc considérer le morphisme de groupes

$$\varphi : \begin{array}{rcl} Stab_{SO_n(\mathbb{R})}(x) & \longrightarrow & SO(H) \\ u & \longmapsto & u_{|H} \end{array}$$

De plus ce morphisme est bijectif car tout $r \in SO(H)$ peut être complété de manière unique en $u \in SO_n(\mathbb{R})$ tel que $u_{|H} = r$ et $u(x) = x$.

Par conséquent on a l'homéomorphisme

$$Stab_{SO_n(\mathbb{R})}(x) \simeq SO(Vect(x)^{\perp}) \simeq SO_{n-1}(\mathbb{R})$$

ce qui montre que $Stab_{SO_n(\mathbb{R})}(x)$ est connexe.

Par conséquent $SO_n(\mathbb{R})$ connexe car $SO_n(\mathbb{R})/Stab_{SO_n(\mathbb{R})}(x)$ et $Stab_{SO_n(\mathbb{R})}(x)$ le sont.
Le théorème de récurrence permet de conclure. □

Théorème. Soit $n \geq 3$, alors $SO_n(\mathbb{R})$ est engendré par les renversements (sans démontrer que $O_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions orthogonales, plus précisément tout $u \in O_n(\mathbb{R})$ est produit d'au plus n réflexions) (à ne pas démontrer dans la leçon 204 Connexité).

Démonstration.
Etape 1 : Si $n = 3$
Soit $u \in SO_3(\mathbb{R})$ tel que $u \neq id_{\mathbb{R}^3}$, alors $u \in O_3(\mathbb{R})$ et $det(u) = 1$, donc il existe τ_1, τ_2 des réflexions orthogonales telles que $u = \tau_1 \circ \tau_2$. Puis, comme $n = 3$, pour $k \in [\![1, 2]\!]$, $\sigma_k := -\tau_k$ est un renversement.
D'où $u = \sigma_1 \circ \sigma_2$.
Etape 2 : Si $n \geq 3$ (seulement pour la leçon 108)
Soit $u \in SO_n(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R})$, donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $2p \leq n$, et $\tau_1, ..., \tau_{2p}$ des réflexions orthogonales telles que

$$u = \tau_1 \circ ... \circ \tau_{2p}$$

Lemme. Pour τ_1 et τ_2 deux réflexions de $\mathbb{R}^n$, il existe deux renversements σ_1 et σ_2 tels que

$$\tau_1 \circ \tau_2 = \sigma_1 \circ \sigma_2$$

Démonstration.
On considère H_1 et H_2 les deux hyperplans de τ_1 et τ_2 et $u := \tau_1 \circ \tau_2 \in O_n(\mathbb{R})$.
Alors $H_1 \cap H_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-2$ (si H_1 et H_2 sont distincts) ou $n-1$ (si $H_1 = H_2$), on peut donc considérer V sous-espace de dimension $n-3$ de $H_1 \cap H_2$ (car $n \geq 3$).
On a donc $u_{|V} = id_{\mathbb{R}^n}$, ainsi

$$\forall x \in V^{\perp}, \forall y \in V, \langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle = 0$$

D'où $u(V^{\perp}) \subset V^{\perp}$, ainsi, d'après l'étape 1, $u_{|V^{\perp}} = \sigma_1 \circ \sigma_2$ avec σ_1 et σ_2 deux renversements de $V^{\perp}$ de dimension 3.
Puis on prolonge σ_1 et σ_2 en $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ deux renversements de $\mathbb{R}^n$ avec $\tilde{\sigma}_{1|V} = \tilde{\sigma}_{2|V} = id_{\mathbb{R}^n}$, pour avoir $u = \tilde{\sigma}_1 \circ \tilde{\sigma}_2$. □

Ainsi, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, il existe deux renversements σ_{2k-1} et σ_{2k} tels que $\tau_{2k-1} \circ \tau_{2k} = \sigma_{2k-1} \circ \sigma_{2k}$, d'où

$$u = \sigma_1 \circ ... \circ \sigma_{2p}$$

Ce qui montre que les renversements engendrent $SO_n(\mathbb{R})$. □

Lemme. Soit $H \triangleleft SO_3(\mathbb{R})$ tel qu'il existe un renversement r d'axe D dans H, alors

$$H = SO_3(\mathbb{R})$$

Démonstration.
Soit r' un renversement d'axe D' de $\mathbb{R}^3$ ie une rotation d'axe D' et d'angle π, alors il existe $s \in SO_3(\mathbb{R})$ tel que $s(D) = D'$ car le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ agit transitivement sur la sphère unité $S \subset \mathbb{R}^3$, donc transitivement sur l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$.
Comme srs^{-1} est semblable à r, srs^{-1} est un renversement de $\mathbb{R}^3$.
De plus D' est un sous-espace propre de srs^{-1} pour la valeur propre 1 :

$$(srs^{-1})(D') = (sr)(D) = s(D) = D'$$

Ainsi srs^{-1} est le renversement d'axe D', ie $r' = srs^{-1}$ et, comme $H \triangleleft SO_3(\mathbb{R})$, $r' = srs^{-1} \in H$.
D'où H contient tous les renversements de $\mathbb{R}^3$.
Or ils engendrent $SO_3(\mathbb{R})$, donc $H = SO_3(\mathbb{R})$. $\square$

Théorème. Le groupe spécial orthogonal $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Démonstration. Soit $H < SO_3(\mathbb{R})$ tel que $H \triangleleft SO_3(\mathbb{R}), H \neq \{id\}$.
Alors il existe $h \in H$ tel que $h \neq id$.
On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} SO_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ g & \longmapsto & tr(ghg^{-1}h^{-1}) \end{array}$$

Ainsi φ est continue car polynomiale en les composantes, sur le compact connexe $SO_3(\mathbb{R})$.
Donc $Im(\varphi)$ est un compact connexe de $\mathbb{R}$, ie un intervalle $Im(\varphi) = [a, b]$ avec $a \leq b \in \mathbb{R}$.
Or

$$\forall g' = r(D, \theta) \in SO_3(\mathbb{R}), tr(g') = 1 + 2cos(\theta)$$

Donc, comme $\forall g \in SO_3(\mathbb{R}), ghg^{-1}h^{-1} \in SO_3(\mathbb{R})$,

$$\forall g \in SO_3(\mathbb{R}), \varphi(g) \in [0, 3]$$

D'où $(a, b) \in [0, 3]^2$.
De plus $\varphi(h) = tr(id_{\mathbb{R}^3}) = 3$, donc $Im(\varphi) = [a, 3]$.
On suppose par l'absurde que $a = 3$, alors

$$\forall g \in SO_3(\mathbb{R}), ghg^{-1}h^{-1} = id_{\mathbb{R}^3} \text{ ie } \forall g \in SO_3(\mathbb{R}), gh = hg$$

ie

$$h \in Z(SO_3(\mathbb{R})) \subset Z(GL_3(\mathbb{R})) \cap SO_3(\mathbb{R}) = \{\lambda id_{\mathbb{R}^3}\} \cap SO_3(\mathbb{R}) = \{id_{\mathbb{R}^3}\}$$

ce qui contredit l'hypothèse $h \neq id_{\mathbb{R}^3}$.
Par conséquent $a < 3$.
Or $1 + 2cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 3$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$a < 1 + 2cos\left(\frac{\pi}{n}\right) < 3$$

Ainsi il existe $g_n \in SO_3(\mathbb{R})$ tel que

$$\varphi(g_n) = 1 + 2cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Donc $h_n := g_n h g_n^{-1} h^{-1}$ est une rotation de trace $1 + 2cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$, donc d'angle $\frac{\pi}{n}$.
De plus, comme $H \triangleleft SO_n(\mathbb{R})$, $h_n \in H$.
Par conséquent h_n^n est une rotation d'angle π appartenant à H, ie un renversement.
Finalement, d'après le lemme précédent, $H = SO_3(\mathbb{R})$ ce qui montre que $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

$\square$

Remarque. Pour n pair, $SO_n(\mathbb{R})$ n'est pas simple car son centre est un sous-groupe distingué non trivial.