Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Analyse de Queffélec et Zuily

Leçons.

1. 201 Espaces de fonctions, exemples et applications
2. 203 Utilisation de la notion de compacité
3. 209 Approximation d'une fonction par des fonctions régulières, exemples et applications
4. 228 Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle, exemples et applications
5. 241 Suites et séries de fonctions, exemples et contre-exemples
6. 261 Loi d'une variable aléatoire, caractérisations, exemples, applications
7. 264 Variables aléatoires discrètes, exemples et applications

Théorême. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, ω son module de continuité i.e.

$$\forall h \in [0,1], \omega(h) = \underset{(u,v)\in[0,1]^2}{sup} (|f(u) - f(v)|, |u-v| \leq h)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère le n-ième polynome de Bernstein

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Alors

$$B_n(f) \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$$

Plus précisément il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Et cette estimation est optimale, i.e. il existe une fonction continue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\delta \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \geq \delta\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Démonstration.
Etape 1 : Convergence de $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$
Soit $x \in [0,1]$, X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre x et $(X_1,...,X_n)$ un n-échantillon de X.
On considère la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
Alors, par indépendance des $X_k \sim \mathcal{B}(x)$, $S_n \sim B(n,x)$.
Donc, par théorème de transfert,

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right) = B_n(f)(x)$$

Soit $\delta \in]0,1[$, alors

$$\begin{array}{rcl} |f(x)-B_n(f)(x)| & = & \left|\mathbb{E}\left(f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)\right| \\ & \leq & \mathbb{E}\left(\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\mathbb{1}_{|x-\frac{S_n}{n}|\leq\delta}\right)+\mathbb{E}\left(\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\mathbb{1}_{|x-\frac{S_n}{n}|>\delta}\right) \\ & \leq & \omega(\delta)\times 1+2\left\|f\right\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\delta\right) \end{array}$$

D'où par inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$|f(x)-B_n(f)(x)| \leq \omega(\delta)+2\left\|f\right\|_\infty\frac{Var(S_n)}{n^2\delta^2} = \omega(\delta)+2\left\|f\right\|_\infty\frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \omega(\delta)+\frac{\left\|f\right\|_\infty}{2n\delta^2}$$

Donc

$$\left\|f-B_n(f)\right\|_\infty \leq \omega(\delta)+\frac{\left\|f\right\|_\infty}{2n\delta^2}$$

Ainsi

$$\underset{n\to+\infty}{limsup}\left\|f-B_n(f)\right\|_\infty \leq \omega(\delta)$$

Or par théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0,1]$, d'où $\omega(\delta) \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0$, ainsi

$$\underset{n\to+\infty}{limsup}\left\|f-B_n(f)\right\|_\infty = 0 \text{ ie } \left\|f-B_n(f)\right\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ce qui montre bien $B_n(f) \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$.
Etape 2 : Vitesse de convergence
D'après les propriétés sur le module de continuité, comme $S_n \in [0,n]$ et $x \in [0,1]$, on a

$$\omega\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right) = \omega\left(\sqrt{n}\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \left(\sqrt{n}\left|x-\frac{S_n}{n}\right|+1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} |f(x)-B_n(f)(x)| & \leq & \mathbb{E}(|f(x)-f(\frac{S_n}{n})|) \\ & \leq & \mathbb{E}\left(\omega\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right)\right) \\ & \leq & \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\mathbb{E}\left(\sqrt{n}\left|x-\frac{S_n}{n}\right|+1\right) \\ & = & \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n}\mathbb{E}\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right)+1\right) \\ & = & \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n}\mathbb{E}\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\times 1\right)+1\right) \end{array}$$

D'où, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{array}{rcl}|f(x)-B_n(f)(x)| & \leq & \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n}\sqrt{\mathbb{E}\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|^2\right)}\times 1+1\right) \\ & = & \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}+1\right) \\ & \leq & \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\end{array}$$

Puis, par passage à la norme uniforme, $\|f-B_n(f)\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Etape 3 : Optimalité de l'estimation

On considère

$$f:\begin{array}{rcl}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left|x-\frac{1}{2}\right|\end{array}$$

Alors f est uniformément continue sur $[0,1]$ car continue sur $[0,1]$ et par théorème de Heine, et

$$\forall h\in[0,1],\omega(h)\leq h$$

Or

$$\begin{array}{rcl}\|f-B_n(f)\|_\infty & \geq & \left|f\left(\frac{1}{2}\right)-B_n(f)\left(\frac{1}{2}\right)\right| \\ & = & |B_n(f)(\frac{1}{2})| \\ & = & |\mathbb{E}(|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}|)| \\ & = & \mathbb{E}(|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}|) \\ & = & \frac{1}{2n}\mathbb{E}(|2S_n-n|)\end{array}$$

De plus $2S_n-n=\sum_{k=1}^{n}(2X_k-1)=\sum_{k=1}^{n}Y_k$ avec $Y_k:=2X_k-1\sim R\left(\frac{1}{2}\right)$.

D'où, par inégalité de Khintchine,

$$\|f-B_n(f)\|_\infty \geq \frac{1}{2n\sqrt{e}}\sqrt{\mathbb{E}((2S_n-n)^2)}=\frac{1}{2n\sqrt{e}}\sqrt{\sum_{k,l=1}^{n}\mathbb{E}(Y_kY_l)}=\frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{e}}\geq\frac{1}{2\sqrt{e}}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$\square$

Lemme. (S'il reste du temps) Soit $(\lambda,\delta)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(u,v)\in[0,1]^2$ tels que $\delta\leq 1,\lambda\delta\leq 1, v>u, |v-u|\leq\delta\lambda$, alors $\omega(\lambda\delta)\leq(\lambda+1)\omega(\delta)$.

Démonstration. On a $u<u+\delta<u+2\delta<...<u+m\delta<v$, avec $m=\lfloor\lambda\rfloor$ car $|v-u|\leq\delta\lambda$, donc, pour $x_k=u+k\delta$ et $x_{m+1}=v$,

$$|f(v)-f(u)|\leq\sum_{k=0}^{m}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\leq(m+1)\omega(\delta)\leq(\lambda+1)\omega(\delta)$$

D'où $\omega(\lambda\delta)\leq(\lambda+1)\omega(\delta)$. $\square$

Lemme. (S'il reste encore du temps) **Inégalité de Khintchine** Soit $Y_1,...,Y_n$ n variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$ (des variables de Rademacher), F_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n engendré par les $Y_1,...,Y_n$, alors

$$\forall Y\in F_n,\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}\leq\sqrt{e}\mathbb{E}(|Y|)$$

Démonstration.
Soit $Y \in F_n$, alors il existe $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ tels que $Y = \sum_{k=1}^{n} a_k Y_k$.
On suppose $\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)} = 1$, donc, par linéarité de l'espérance et propriétés des Y_k,

$$1 = \mathbb{E}(Y^2) = \sum_{k,l=1}^{n} a_k a_l \mathbb{E}(Y_k Y_l) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 0$$

Soit $Z = \prod_{k=1}^{n} (1 + i a_k Y_k)$ le produit de Riesz imaginaire, alors, par théorème de Pythagore,

$$|Z| = \prod_{k=1}^{n} \sqrt{1 + a_k^2 Y_k^2} = \prod_{k=1}^{n} \sqrt{1 + a_k^2} \leq \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{2} a_k^2} = \sqrt{e}$$

D'où $\|Z\|_\infty \leq \sqrt{e}$.
D'autre part, pour $k \in [\![1, n]\!]$, par indépendance des Y_j, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Y_k Z\right) &= \mathbb{E}\left(Y_k \left(1 + i a_k Y_k\right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \left(1 + i a_j Y_j\right)\right) \\
&= \mathbb{E}(Y_k(1 + i a_k Y_k)) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \mathbb{E}(1 + i a_k Y_k) \\
&= i a_k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} 1 = i a_k
\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{E}(YZ) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{E}(Y_k Z) = \sum_{k=1}^{n} i a_k^2 = i$.
Par conséquent, comme $|\mathbb{E}(YZ)| \leq \mathbb{E}(|Y|) \|Z\|_\infty$, on obtient

$$\mathbb{E}(|Y|) \geq \frac{|i|}{\|Z\|_\infty} \geq \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}}{\sqrt{e}}$$

Puis, pour $\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}$ quelconque, on considère $Y' := \frac{Y}{\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}}$ pour avoir $\sqrt{\mathbb{E}(Y'^2)} = 1$ et d'après ce qui précède

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \leq \mathbb{E}(|Y'|) = \frac{\mathbb{E}(|Y|)}{\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}} \text{ ie } \sqrt{\mathbb{E}(Y^2)} \leq \sqrt{e}\mathbb{E}(|Y|)$$

$\square$