Homéomorphisme de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Histoires hédonistes de groupes et de géométries tome 1 de Caldero et Germoni

Leçons.

1. 156 Exponentielles de matrices, applications
2. 158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes
3. 265 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales

Théorème. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'application $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Démonstration.
Etape 1 : $exp(S_n(\mathbb{R})) \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$ et exp continue
Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, alors, d'après le théorème spectral, S est orthogonalement diagonalisable, ie il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$S = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1} = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)^tP$$

Ainsi, par continuité et passage à la limite,

$$exp(S) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1})^k = Pexp(Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n))^tP = PDiag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})^tP$$

Donc ${}^texp(S) = exp(S)$, d'où $exp(S) \subset S_n(\mathbb{R})$.
Puis pour $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, comme ${}^tP \in O_n(\mathbb{R})$,

$$\langle X, exp(S)X\rangle = \langle {}^tPX, Diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})^tPX\rangle = \langle Y, Diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})Y\rangle$$

en notant $Y = PX \neq 0$.
D'où

$$\langle X, exp(S)X\rangle = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} y_i^2 > 0$$

D'où $exp(S) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ce qui montre que $exp(S_n(\mathbb{R})) \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Or exp est continue sur $M_n(\mathbb{R})$, donc par restriction $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ également.

Etape 2 : Surjectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$

Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors, par théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $(\mu_1, ..., \mu_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que

$$B = PDiag(\mu_1, ..., \mu_n)^t P$$

Or $exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est bijectif, donc $\forall i \in [\![1, n]\!], \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, e^{\lambda_i} = \mu_i$.
On considère donc

$$S = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)^t P$$

Pour avoir $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $exp(S) = B$ ce qui montre la surjectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Etape 3 : Injectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$

Soit $(A, A') \in (S_n(\mathbb{R}))^2$ tel que

$$exp(A) = exp(A')$$

Ainsi, comme précédemment,

$$A = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)^t P$$

De plus, en considérant $(\lambda'_1, ..., \lambda'_m)$ les λ_i distincts, les $(e^{\lambda'_1}, ..., e^{\lambda'_m})$ sont distincts par injectivité de l'exponentielle réelle, donc il existe un polynôme interpolateur de Lagrange $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, m]\!], Q(e^{\lambda'_i}) = \lambda'_i$.
Ainsi

$$\forall i \in [\![1, n]\!], Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$$

Alors

$$A = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)^t P = PDiag(Q(e^{\lambda_1}), ..., Q(e^{\lambda_n}))^t P = Q(exp(A)) = Q(exp(A'))$$

D'où $AA' = A'A$ ie A et A' commutent.
Or, par théorème spectral, A et A' sont orthodiagonalisables, donc A et A' sont orthodiagonalisables dans une même base orthonormée, ie il existe $P_0 \in O_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda'_1, ..., \lambda'_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que

$$A = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)^t P, A' = PDiag(\lambda'_1, ..., \lambda'_n)^t P$$

D'où

$$PDiag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})^t P = exp(A) = exp(A') = PDiag(e^{\lambda'_1}, ..., e^{\lambda'_n})^t P$$

Ainsi $\forall i \in [\![1, n]\!], e^{\lambda_i} = e^{\lambda'_i}$ puis $A = A'$ ce qui montre l'injectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Etape 4 : Continuité de $exp^{-1} : S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$

Utilisons la caractérisation séquentielle de continuité : Soit $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} = (exp(A_p))_{p\in\mathbb{N}} \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ et $B = exp(A) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que

$$B_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} B$$

Sous-étape a : $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée

Comme la suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge, elle est bornée pour la norme subordonnée $\|\cdot\|_2$.
De même, par continuité du passage à l'inverse, la suite $(B_p^{-1})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers B^{-1}, donc elle est également bornée pour $\|\cdot\|_2$.

Lemme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$, alors

$$\|S\|_2 = max(Sp(S)) =: \rho(S)$$

Démonstration. Comme $M \in S_n(\mathbb{R})$, par théorème spectral, il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(v_1, ..., v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$ base orhtonormée de vecteurs propres associés aux valeurs propres $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et quitte à réordonner les λ_i, on peut supposer

$$\rho(S) = |\lambda_1| \geq ... \geq |\lambda_n|$$

Soit $X \in \mathbb{R}^n$ de norme 1, alors il existe $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$.
Donc

$$\|SX\|_2^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i v_i\right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 |x_i|^2 \leq \rho(S)^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \rho(S)^2$$

avec égalité si $X = v_1$.
D'où $\|S\|_2 = \rho(S)$. □

Ainsi, d'après le lemme précédent, il existe $(C, C') \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall p \in \mathbb{N}, max(Sp(B_p)) \subset]0, C], max(Sp(B_p^{-1})) \subset]0, C']$$

Or $\forall p \in \mathbb{N}, max(Sp(B_p^{-1})) = min(Sp(B_p))^{-1}$, donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, Sp(B_p) \subset [C'^{-1}, C] \subset]0, +\infty[$$

Puis

$$\forall p \in \mathbb{N}, Sp(A_p) = ln(Sp(B_p)) \subset [ln(C'^{-1}), ln(C))] \subset \mathbb{R}$$

Donc, par le lemme précédent, la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme $\|\cdot\|_2$.
Sous-étape b : $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ n'admet qu'une valeur d'adhérence
Soit $A' \in S_n(\mathbb{R})$ et une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tel que

$$A_{\varphi(p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A'$$

Donc, par continuité de exp :

$$B_{\varphi(p)} = exp(A_{\varphi(p)}) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} exp(A')$$

D'où, par unicité de la limité, $exp(A) = exp(A')$, puis, par injectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$, $A = A'$.
Sous-étape c : Conclusion
Ainsi, comme $S_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, $A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A$ ce qui montre que $exp^{-1} : S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ est continue. □

Remarque. De façon similaire on peut montrer que $exp : H_n(\mathbb{C}) \longrightarrow H_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.