Mémoire de M2

Mathématiques Fondamentales

Leçon 265 - Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales

Emilie Tezenas du Montcel

Jury : Isabelle Gruais

10 octobre 2018

école normale supérieure rennes

Université de Rennes 1

Résumé

Les fonctions usuelles, telles que les polynômes, les fonctions trigonométriques, l'exponentielle et leurs inverses, apparaissent assez tôt dans une vie mathématique. Les fonctions spéciales, quant à elles, font leur entrée beaucoup plus tard, lorsque les fonctions de la variable complexe sont abordées. L'enseignement les détache en effet de leur contexte initial, la résolution d'équations aux dérivées partielles issues des problèmes de la physique, pour lesquelles il n'existe pas de théorie générale en dehors du cas linéaire. Dédiées à la résolution de problèmes très spécifiques pour combler les trous de la théorie, les fonctions spéciales sont maintenant regroupées en une liste dont on se propose de traiter quelques exemples classiques. Durant cette étude, nous tenterons de mettre en valeur le rôle spécifique de la variable complexe et l'avantage tiré de ses différences et similitudes avec la variable réelle par prolongement au plan complexe. Il s'ensuit que les fonctions spéciales sont naturellement abordées au cas par cas. Nous avons choisi de détailler l'étude de l'exponentielle comme cas particulier de fonction entière non spéciale avant de nous intéresser aux fonctions spéciales Γ et ζ de Riemann dont les singularités requièrent des arguments plus élaborés, en particulier pour déterminer la partie du plan complexe où le prolongement holomorphe est défini. Le cas de la fonction ζ sera développé. La haute valeur ajoutée des fonctions spéciales se vérifie dans leurs applications, en particulier l'établissement de relations fonctionnelles, dont la formule des compléments donnée en développement pour la fonction Γ, et à la théorie des nombres pour la fonction ζ.

Références

[1] Julien Bernis and Laurent Bernis. *Analyse pour l'agrégation : 40 développements.* Ellipses, 2018.

[2] Bernard Candelpergher. *Fonctions d'une variable complexe.* A. Colin, 1995.

[3] John B. Conway. *Functions of one complex variable.* Springer, 1978.

[4] Anatoli Karatsuba. *The Riemann Zeta function.* Walter de Gruyter, 1992.

[5] Ahmed Lesfari. *Variables Complexes.* Ellipses, 2014.

[6] François Rouvière. *Petit Guide de Calcul Différentiel, à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Cassini, 2015.

[7] Walter Rudin. *Analyse Réelle et Complexe.* Dunod, 2009.

[8] Jean-Pierre Serre. *Cours d'arithmétique.* Presses universitaires de France, 1995.

Table des matières

I Plan de la leçon 3

1 Fonctions usuelles et variable complexe 3
1.1 Fonctions entières usuelles 3
1.2 Inversion de l'exponentielle complexe 5
1.3 Théorie de l'indice 6

2 Fonction Gamma et applications 7
2.1 Définition et prolongement 7
2.2 Relations fonctionnelles 8

3 Fonction Zêta de Riemann et nombres premiers 9
3.1 Définition et propriétés 9
3.2 Equations fonctionnelles et applications 10

II Développements 11

4 Formule des Compléments 11

5 Prolongement de la fonction Zêta de Riemann au plan complexe 16

Première partie

Plan de la leçon

1 Fonctions usuelles et variable complexe

Le but de cette première partie est d'étudier dans quelle mesure des fonctions de la variable réalle se prolongent à la variable complexe. On choisit de se focaliser sur l'exponentielle, et les fonctions trigonométriques qui en découlent, puisque cette dernière possède de bonnes propriétés sur $\mathbb{C}$.

1.1 Fonctions entières usuelles

Afin de définir l'exponentielle en variable complexe, on part de son développement en série entière de rayon infini, ce qui en fait une fontion entière.

Définition - Théorème 1
Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.
Le Rayon de Convergence de cette série vaut $+\infty$.

On peut déjà énoncer plusieurs propriétés remarquables de l'exponentielle complexe :

Théorème 2

1. $z \mapsto \exp(z)$ est analytique sur $\mathbb{C}$ (comme série entière de rayon de convergence infini).
2. Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2}$. Cette égalité découle d'un calcul de produit de séries entières, sous forme de produit de Cauchy.
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \neq 0$. En effet, d'après l'égalité précédente, si exp s'annule en un point, elle s'annule sur tout $\mathbb{C}$. Or, $\mathrm{e}^0 = 1 \neq 0$.
4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\frac{\mathrm{d}\exp}{\mathrm{d}z}(z) = \exp(z)$. On utilise pour cela simplement le théorème de dérivation des séries entières. On pourrait également utiliser la définition de la dérivée par la limite d'un taux d'accroissement, et les propriétés de sommation de l'exponentielle pour prouver ce résultat.

On remarque que toutes ces premières propriétés reposent sur deux arguments : le rayon de convergence infini, et la propriété d'additivité.
Le rôle central de l'exponentielle pour la variable complexe s'exprime notamment via l'application suivante :

Application 3
Tout nombre complexe z s'écrit sous forme *trigonométrique* : $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$.
Cette écriture est utilisée dans la résolution d'équations à inconnue complexe par exemple, ou encore pour paramétrer des arcs de cercles (voir les applications du théorème des Résidus).

Corollaire 4
La restriction de l'exponentielle à la droite réelle, $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$, est le seul morphisme continu non nul de $(\mathbb{R}, +)$ dans $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$ (à automorphismes de $\mathbb{R}$ près).

Preuve. Soit φ un tel morphisme, et $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. Comme φ est un morphisme, on a :

$$\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$$

En particulier, $s = t = 0$ donne $\varphi(0) = \varphi(0)^2$. Donc $\varphi(0) = 1$ ou $\varphi(0) = 0$.
On intègre maintenant l'expression par rapport à une des deux variables, pour montrer que φ est dérivable. On vérifie ensuite que φ vérifie une équation différentielle dont l'exponentielle est la seule solution non nulle. Là encore, le fait que le morphisme est supposé non nul donne $\varphi(0) = 1$. □

Application 5 (Loi sans mémoire)
Une variable aléatoire à densité sans mémoire suit nécessairement une loi exponentielle.

Preuve. En effet, on dit d'une variable aléatoire X qu'elle est sans mémoire si pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$. En utilisant la formule du conditionnement $\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \frac{\mathbb{P}((X > s+t) \cap (X > t))}{\mathbb{P}(X > t)}$ on obtient

$$\mathbb{P}(X > s + t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t)$$

De là, si la variable est à densité, la fonction de survie est alors un morphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$, donc, d'après le corollaire 4, $\mathbb{P}(X > t) = \mathrm{e}^{-t}$ qui est la queue d'une exponentielle. □

Plus généralement, l'exponentielle complexe joue un rôle fondamental dans la théorie des probabilités, à travers la transformée de Fourier.

Application 6 (Transformée de Fourier)

1. Si X est une variable aléatoire, sa loi est déterminée de façon unique par sa fonction caractéristique :

$$\begin{array}{cccc} \varphi_X & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & t & \mapsto & \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{itX}\right] \end{array}$$

2. φ caractérise l'indépendance entre plusieurs variables :

$$X \text{ et } Y \quad \text{sont indépendantes si, et seulement si} \quad \varphi_{X,Y}(t_1, t_2) = \varphi_X(t_1)\varphi_X(t_2).$$

3. Si X admet un moment d'ordre n alors $\mathbb{E}\left[X^n\right] = (-1)^n \varphi_X^{(n)}(0)$.

On définit maintenant les fonctions cosinus et sinus complexe :

Définition 7 (Fonctions trigonométriques)
Pour $z \in \mathbb{C}$ on définit :
— $\cos(z) = \sum\limits_{n \geq 1} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$
— $\sin(z) = \sum\limits_{n \geq 1} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Proposition 8 (Formule de Moivre)
Les formules de Moivre que l'on connaît en variable réelle sont ici encore valables :

$$\text{Pour tout } z \in \mathbb{C}, \quad \cos(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i}$$

Remarque
Attention cependant, il n'est plus question ici de parler de partie réelle ou imaginaire. En effet, le cosinus et le sinus complexes peuvent prendre des valeurs complexes. Par exemple, $\sin(i) = i.\sinh(1) \in i.\mathbb{R}$. Par contre, la définition de

ces fonctions comme des séries entières, de rayon de convergence infini, permettent d'obtenir la même régularité que l'exponentielle.

Proposition 9
Les fonctions cos et sin sont analytiques sur $\mathbb{C}$ et non bornées sur $\mathbb{C}$.

Remarque
Le fait que ces fonctions soient non bornées provient du thèorème de Liouville, puisque cosinus et sinus sont analytiques sur $\mathbb{C}$. Cela constitue leur principale différences avec la variable réelle.

Application 10
En variable réelle, $(\cos, \sin)$ est une base de l'espace des solutions de $f" + f = 0$.

1.2 Inversion de l'exponentielle complexe

L'exponentielle réelle est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On peut donc définir sa réciproque, le logarithme néperien.

Définition 11
Le logarithme $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est défini comme la réciproque de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

Remarque
On peut aussi le définir comme la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ nulle en 1.

Si l'exponentielle complexe est surjective (grâce notamment à l'écriture des nombres complexes sous forme trigonométrique), elle n'est en revanche pas injective. Par exemple $e^0 = 1 = e^{2i\pi}$. On ne peut donc pas inverser l'exponentielle sur tout $\mathbb{C}$. Cependant, lorsque l'on restreint l'espace des arguments possibles, on peut définir une fonction logarithme, qui permet d'inverser l'exponentielle. On utilise pour cela la même idée de primitivation qu'en variable réelle.

Théorème 12 (Inversion de l'exponentielle complexe)
Soit d_α une demi-droite d'origine et d'argument α. (voir figure 1)

La fonction

$$\begin{array}{rcrcl} \exp & : & \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \alpha < \mathrm{Im}(z) < \alpha + 2\pi\} & \to & \mathbb{C} \setminus \mathrm{d}_\alpha \\ & & z & \mapsto & \mathrm{e}^z \end{array}$$

est bijective et possède un inverse analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathrm{d}_\alpha$ défini par

$$\log(z) = \int_{z_0}^{z_1} \frac{1}{\xi} \mathrm{d}\xi + c_0$$

où $z_0 \in \mathrm{d}_{\alpha+\pi}$ de sorte que $\mathbb{C} \setminus \mathrm{d}_\alpha$ est étoilé par rapport à z_0, et c_0 est une constante telle que $c_0 = \exp(z_0)$ et $\mathrm{Im}(c_0) \in]\alpha, \alpha + 2\pi[$.

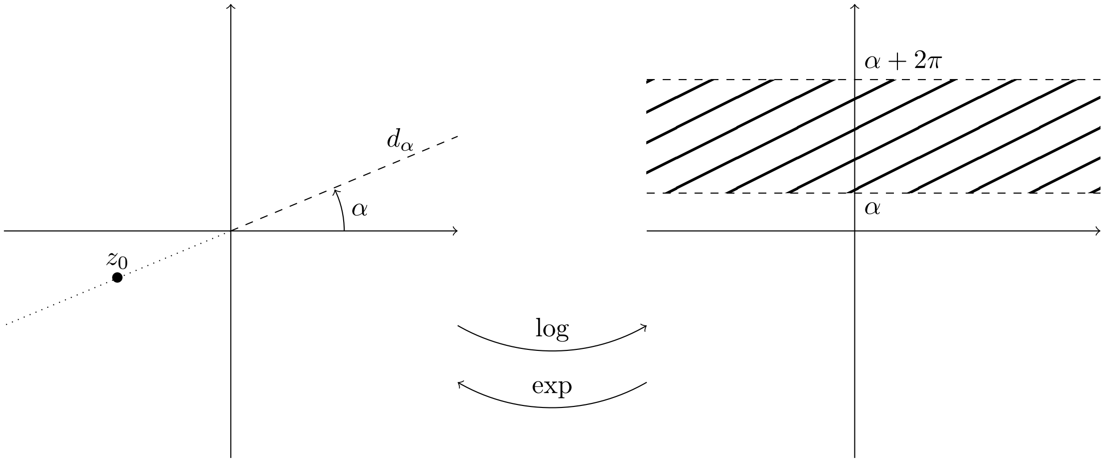

FIGURE 1 – Inversion de l'exponentielle pour des arguments restreints

Remarque
Le fait que $\mathbb{C} \setminus \mathrm{d}_\alpha$ soit étoilé par rapport à z_0 permet d'intégrer sur le segment $[z_0, z_1] \subset \mathbb{C} \setminus \mathrm{d}_\alpha$.

Application 13
La détermination du logarithme complexe permet de définir les fonctions puissances sur $\mathbb{C}$ privé d'une demi-droite partant de l'origine.

1.3 Théorie de l'indice

Définition 14 (Indice)
L'*indice* d'un point $a \in \mathbb{C}$ par rapport à un chemin fermé continu $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ vaut

$$\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}$$

Remarque
Intuititivement, l'indice d'un point par rapport à un chemin fermé représente le nombre de tours que le chemin effectue autour de ce point.

Proposition 15
L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ind}(\gamma, .) \quad : \quad \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1]) & \to & \mathbb{Z} \\ a & \mapsto & \mathrm{Ind}(\gamma, a) \end{array}$$

est bien définie et continue.

Application 16
Le logarithme complexe ne peut pas être prolongé analytiquement sur $\mathbb{C}$. En effet, si c'était le cas, $z \mapsto \frac{1}{z}$ serait une primitive d'une fonction analytique sur $\mathbb{C}$, donc son intégrale serait nulle sur tout chemin fermé. Or, si on choisit le contour défini par le cercle unité dans $\mathbb{C}$, l'intégrale $\oint_{\$^1} \frac{\mathrm{d}z}{z}$ vaut l'indice de 0 par rapport au contour γ, donc vaut $1 \neq 0$.

L'indice intervient très classiquement dans le Théorème des Résidus, énoncé ci-après :

Théorème 17 (Théorème des Résidus)
Soit f une fonction méromorphe d'un ouvert $\mathrm{U} \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{P}$ l'ensemble de ses pôles.

Alors pour tout lacet γ,

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi \sum_{\mathrm{a}\in\mathcal{P}} \mathrm{Ind}(\gamma, \mathrm{a})\mathrm{Res}(f, \mathrm{a})$$

où $\mathrm{Res}(f, \mathrm{a})$ est le Résidu de la fonction f au point a.

Ce théorème permet, entre autres, de calculer de nombreuses intégrales de fonctions qui ne sont pas forcément à variable complexe, comme par exemple la transformée de Fourier d'une gaussienne.

Application 18

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4}}$$

On l'utilise également pour établir des équations fonctionnelles, comme celle de la cotangente, utile dans la preuve du prolongement de ζ à $\mathbb{C}$.

Application 19

$$\mathrm{cotan}(\pi a) = \frac{1}{\pi a} - \frac{2a}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2 - a^2} \qquad \text{Pour tout } a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}.$$

2 Fonction Gamma et applications

La fonction Γ constitue notre premier exemple de fonction spéciale. Sa formulation intégrale permet d'en déterminer le domaine de définition sur l'axe réel où les premières propriétés classiques sont valables, avant de la prolonger à l'ensemble des complexes de partie réelle strictement positive. Nous verrons dans cette partie que cette fonction interpole la factorielle sur l'ensemble des entiers naturels, et qu'elle peut être prolongée en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ de pôles les entiers strictement négatifs. Nous nous intéresserons ensuite à quelques relations fonctionnelles classiquement vérifiées par Γ.

2.1 Définition et prolongement

Définition 20
La fonction Γ peut être définie par une intégrale à paramètre. Pour $\mathrm{Re}(z) > 0$, on pose

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Le théorème d'holomorphie sous l'intégrale nous permet d'établir la proposition suivante :

Proposition 21
La fonction Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

Preuve. Pour appliquer le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, on se restreint à des domaines de la forme $0 < \delta < \mathrm{Re}(z)$, et on utilise l'intégrabilité de l'intégrande au voisinage de 0. □

Une intégration par parties donne la proposition suivante :

Proposition 22
Pour tout $z \in \{\mathrm{Re}(z) > 0\}$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Application 23
De la proposition précédente, on déduit une expression de la factorielle en fonction de Γ après une récurrence élémentaire : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Proposition 24 (Equivalent de Stirling continu)
Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\Gamma(t+1) \sim t^t \, \mathrm{e}^{-t} \sqrt{2\pi t}$$

Ce résultat utilise la méthode dite de Laplace (cf Rouvière, [6], p349).

Application 25 (Equivalent de Stirling discret)

$$n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Application 26
Soit $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (n, p_n), avec $np_n \to p$.
Alors $(X_n)_{n \leq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{P}(p)$ la loi de Poisson de paramètre p.

Théorème 27
La fonction Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont
- les pôles sont les entiers négatifs,
- les résidus valent $\mathrm{Res}(\Gamma, -1) = \frac{(-1)^n}{n!}$.

Définition 28 (Transformée de Laplace)
Pour $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ mesurable, on pose $\sigma_0 = \inf\{\sigma \in \mathbb{R} \text{ tq } f(x)\,\mathrm{e}^{\sigma x} \text{ est intégrable}\}$.
Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > \sigma_0$, on pose

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{e}^{-zx}\,\mathrm{d}x$$

Remarque
On remarque que $\Gamma(n) = \mathcal{L}(x \mapsto x^{n-1})(1)$. On en déduit que la fonction Γ peut s'interpréter comme la transformée de Laplace des monômes. Plus généralement, la transformée de Laplace constitue un prolongement naturel de la fonction Γ. Comme la transformée de Fourier, elle est classiquement utilisée en physique pour résoudre les équations aux dérivées partielles.

2.2 Relations fonctionnelles

La fonction Γ possède d'autres expressions que la formulation intégrale, qui peuvent être choisies comme autant de définitions alternatives, utiles lorsqu'il s'agit de démontrer des propriétés complémentaires.

Théorème 29 (Formule des Compléments)
Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Preuve. La preuve pour $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$ est détaillée en fin de document, et fait l'objet d'un développement. □

Remarque
Cette relation fonctionnelle entre la fonction Γ et le sinus complexe est donc valable en dehors des zéros du sinus, qui

constituent donc des pôles de cette fonction. En revanche, lorsqu'on inverse l'expression pour obtenir $\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}$, cette relation est valable sur tout $\mathbb{C}$. (Question posée par le jury)

Proposition 30 (Définition de Weierstrass)
On peut également définir la fonction Γ comme un produit infini de fonctions holomorphes.

$$\text{Pour } z \in \mathbb{C}, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = \mathrm{e}^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \mathrm{e}^{-z/n}$$

Preuve. On commence, en fait, par exprimer Γ à l'aide du produit d'Euler : pour $\mathrm{Re}(z) > 0$,

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

Cette relation se montre en considérant la suite de fonctions $f_n(t) = \mathbb{1}_{]0,n[}(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}$ que l'on intègre sur $]0, +\infty[$. Le Théorème de Convergence Dominée permet de montrer que $\Gamma(z)$ est la limite de cette intégrale. Au moyen d'une récurrence, on montre enfin que cette intégrale est égale au produit $\frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$. On passe ensuite à la limite pour obtenir l'égalité souhaitée.

□

Remarque
Cette écriture permet, en étudiant les propriétés du produit infini, de montrer que Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ privé des entiers négatifs, et que Γ ne s'annule pas.

Application 31
Avec la formule des compléments, on obtient $\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right)$
Ce qui, évalué en 1/2, donne $\pi = 2 \prod_{n\geq 1} \left(\frac{4n^2}{4n^2-1}\right)$.

Application 32 (Γ en probabilités)
— On peut définir une loi de probabilité à l'aide de la fonction Γ, notée $\gamma(k, \theta)$, de densité $f(x) = \frac{x^{k-1} \mathrm{e}^{-x/\theta}}{\Gamma(k)\theta^k} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$.
— La somme de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre θ suit une loi $\gamma(n, \theta)$.
— Loi du $\chi^2(n)$: c'est le nom donné à la loi $\Gamma(n/2, 1/2)$. Cette loi est très utilisée dans les tests d'adéquation à une loi en statistiques.

3 Fonction Zêta de Riemann et nombres premiers

La fonction ζ constitue le deuxième exemple de fonction spéciale étudié ici. De la même façon que pour la fonction Γ, on la définit dans un premier temps au moyen d'une somme de série, dont on connaît les propriétés sur un certain domaine de $\mathbb{C}$, avant de chercher à prolonger la fonction au moyen d'équations fonctionnelles.

3.1 Définition et propriétés

Définition 33
Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, on pose

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Théorème 34
La fonction ζ est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$.

Preuve. De la même façon que pour l'holomorphie de Γ sur $\mathrm{Re}(z) > 0$, il faut ici, pour appliquer le théorème d'holomorphie, se placer sur des domaines de la forme $1 < \delta \leq \mathrm{Re}(z)$. □

Remarque (Question posée par le jury)
On peut d'ores et déjà étudier la limite de $\zeta(k)$ quand $k \in \mathbb{N}$ et $k \to +\infty$.
On utilise pour cela une comparaison série-intégrale : soit $n \neq 2$ et $k \geq 2$. Alors $\int_n^{n+1} \frac{1}{t^k}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n^k} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^k}\mathrm{d}t$.

D'où

$$1 + \int_2^{N+1} \frac{1}{t^k}\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^k} \leq 1 + \int_1^N \frac{1}{t^k}\mathrm{d}t$$

.

On intègre, pour obtenir

$$1 + \frac{1}{(k-1)2^{k-1}} - \frac{1}{(k-1)(N+1)^{k-1}} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^k} \leq 1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{(k-1)N^{k-1}}$$

On passe d'abord à la limite en $N \to +\infty$, puis en $k \to +\infty$ et on obtient par théorème des gendarmes :

$$\lim_{k \to +\infty} \zeta(k) = 1$$

3.2 Equations fonctionnelles et applications

Proposition 35 (Equation fonctionnelle de ζ)
Pour $s \in \mathbb{C}\backslash_1$, on a l'identité suivante :

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\zeta(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

Cette équation fonctionnelle permet d'obtenir le théorème suivant :

Théorème 36 (Prolongement de ζ)
La fonction ζ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, avec un unique pôle simple en 1, de résidu 1.
De plus, pour $n \leq 0$, $\zeta(2n) = 0$. Les entiers négatifs pairs sont appelés zéros triviaux de ζ.

Preuve. Cette proposition fait l'objet d'un développement, détaillé en fin de document. □

Remarque Culturelle 37 (Conjecture de Riemann)
Les zéros non triviaux de ζ ont tous $\frac{1}{2}$ pour partie réelle.

Théorème 38 (Produit d'Euler)
La fonction ζ s'exprime comme un produit infini faisant intervenir les nombres premiers :

$$\text{Pour } \mathrm{Re}(s) > 1, \quad \zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

Application 39
On obtient alors un équivalent de la somme des inverses des nombres premiers :

$$\text{Pour } \mathrm{Re}(s) > 1, \quad \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \underset{s\to 1^+}{\sim} \ln\frac{1}{s-1}$$

Deuxième partie

Développements

4 Formule des Compléments

La formule des compléments est une équation fonctionnelle qui permet de faire le lien entre la fonction Γ et le sinus complexe. On montre l'égalité sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et l'on peut ensuite prolonger le résultat à la bande ouverte de $\mathbb{C}$ correspondante en utilisant l'holomorphie des fonctions en jeu sur cet ensemble et leur égalité sur un domaine contenant un point d'accumulation. On pourra trouver ce développement dans livre de développements de J. Bernis [1].

Théorème 1
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) \in]0,1[$,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Étape 1
La première étape consiste à calculer, pour $x \in]0,1[$, $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ sous forme d'intégrale.

Soit $x \in]0,1[$. On a :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \int_0^\infty s^{-x}\,\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s$$

Les intégrandes étant toutes positives, le théorème de Fubini-Tonelli permet de réécrire le produit des deux intégrales sous la forme d'une intégrale double :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{t}{s}\right)^x \frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-(t+s)}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

On introduit maintenant le changement de variable :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 & \leftarrow & \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \\ & & (s,t) & \mapsto & \left(s+t, \frac{t}{s}\right) \end{array}$$

φ est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. On calcule le Jacobien de son inverse, en notant $u = s+t$ et $v = \frac{t}{s}$:

$$|J_\varphi| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{t}{s^2} & \frac{1}{s} \end{vmatrix} = \frac{s+t}{s^2} \quad \text{d'où } |J_{\varphi^{-1}}| = \frac{s^2}{s+t} = \frac{u}{(1+v)^2}.$$

D'autre part, on a $\frac{1}{t} = \frac{1+v}{uv}$. Revenons maintenant au calcul. La formule de changement de variable qui en résulte et le théorème de Fubini-Tonelli entraînent, compte tenu de l'égalité $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \int_0^\infty \int_0^\infty v^x \,\mathrm{e}^{-u}\, \frac{1+v}{uv} \frac{u}{(1+v)^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&\overset{F.T}{=} \int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{1+v} \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} \,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}v \\
&= \int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{1+v} \mathrm{d}v \\
&= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}v}{v^{1-x}(1+v)}
\end{aligned}
$$

On utilise l'invariance de $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ par changement de variable $x \mapsto 1-x$, pour finalement obtenir

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}v}{v^x(1+v)}$$

La fonction Γ étant définie sur la bande $\{\mathrm{Re} > 0\}$, la quantité $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ est bien définie pour $x \in [0, 1[$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est donc intégrable sur $]0, +\infty[$.

On a donc obtenu une expression de $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ sous forme intégrale. L'étape suivante consistera à calculer cette intégrale à l'aide du théorème des résidus.

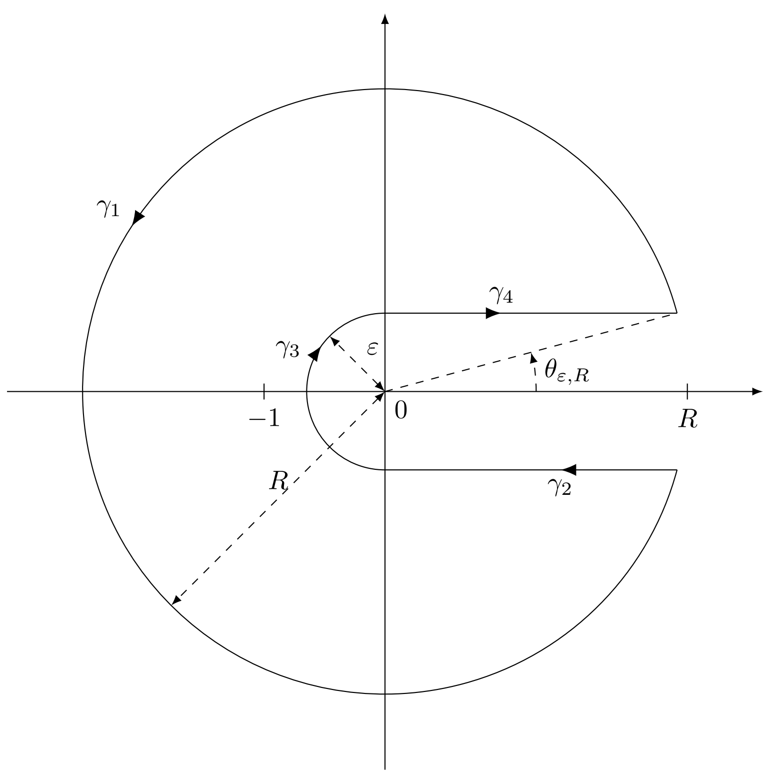

FIGURE 2 – Contour d'intégration pour le théorème des Résidus

Étape 2

On va donc calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}v}{v^x(1+v)}$$

On va utiliser pour cela le Théorème des Résidus, appliqué à la fonction suivante :

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{z^x(1+z)} \end{array}$$

f est méromorphe sur $\mathbb{C}$, et possède deux pôles simples, 0 et 1. On intègre f sur le contour $\mathcal{C}$ présenté sur la figure 2. On décompose ce contour en quatre parties, les deux segments et les deux arcs de cercle, que l'on paramètrera séparément. On fait ensuite tendre ε vers 0 et R vers $+\infty$.
Munis de ce contour, on peut maintenant choisir une détermination du logarithme complexe qui nous permet de bien définir le terme z^x dans l'expression de f. On choisit la détermination de droite $\mathbb{R}^+$, i.e. pour $z \in \mathbb{C}, \quad z^x = \mathrm{e}^{x(\ln|z|+i\theta)}$, avec $\theta \in]0, 2\pi[$. Il faudra dans la suite du calcul faire attention à l'argument des complexes lorsque ε tend vers 0 : sur le segment γ_2, l'argument de $z^x = \mathrm{e}^{x\log(z)}$ tend vers 2π, alors qu'il tend vers 0 sur le segment γ_4.

▷ **Théorème des Résidus**
Le Théorème des Résidus appliqué à f donne

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi \mathrm{Res}_{-1}(f) = 2i\pi(-1)^{-x} = 2i\pi\,\mathrm{e}^{-i\pi x}$$

Il est important de remarquer que le fait que $(-1)^{-x} = \mathrm{e}^{-i\pi x}$ provient de la détermination du logarithme choisie.

▷ **Intégrale sur γ_1**
On utilise la paramétrisation suivante :

$$\gamma_1 \; : \; \begin{array}{ccc} [\theta_{\varepsilon,R}, 2\pi - \theta_{\varepsilon,R}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & R\,\mathrm{e}^{it} \end{array}$$

où $\theta_{\varepsilon,R} = \arcsin \frac{\varepsilon}{R} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$

On remarque que pour tout $t \in [0, 2\pi]$:

$$|f(R\,\mathrm{e}^{it})R\,\mathrm{e}^{it}| \leq \frac{1}{R^{x-1}(R-1)} \leq \frac{2}{R^x}, \quad \forall R > 2.$$

d'où on déduit

$$\left| \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{2}{R^x}\mathrm{d}t = \frac{4\pi}{R^x}, \quad \text{avec} \quad \lim_{R \to +\infty} \frac{4\pi}{R^x} = 0.$$

Et la convergence est uniforme par rapport à $\varepsilon > 0$, au sens suivant :

$$\forall \delta > 0,\ \exists R_0 > 0 \ \text{ t.q. : } \forall R > R_0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \left| \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq \delta$$

D'où

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

▷ **Intégrale sur γ_3**
On utilise une paramétrisation analogue :

$$\gamma_3 \; : \; \begin{array}{ccc} [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \varepsilon\,\mathrm{e}^{i(2\pi - t)} \end{array}$$

L'intégrale de f sur cet arc de cercle devient alors :

$$\int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{-i\varepsilon\,\mathrm{e}^{-it}}{(\varepsilon\,\mathrm{e}^{-it})^x(1+\varepsilon\,\mathrm{e}^{-it})}\mathrm{d}t$$

Ici encore une majoration par inégalité triangulaire suffit à conclure sur la limite de cette intégrale quand $\varepsilon \to 0$. En effet,

$$\left|\frac{-i\varepsilon\,\mathrm{e}^{-it}}{(\varepsilon\,\mathrm{e}^{-it})^x(1+\varepsilon\,\mathrm{e}^{-it})}\right| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon^x(1-\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \varepsilon^{1-x} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{car } 1-x>0$$

▷ **Intégrale sur γ_2 :**

On paramétrise le segment comme suit :

$$\begin{array}{rcccl} \gamma_2 & : & [-\sqrt{R^2-\varepsilon^2}, 0] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & t & \longmapsto & -i\varepsilon - t \end{array}$$

L'intégrale de f sur ce segment devient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z &= \int_{-\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}^{0} \frac{-\mathrm{d}t}{(-i\varepsilon - t)^x(1-t-i\varepsilon)} \\ &= -\int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} \frac{\mathrm{d}t}{(-i\varepsilon+t)^x(1+t-i\varepsilon)} \\ &= -\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t)\frac{\mathrm{d}t}{(-i\varepsilon+t)^x(1+t-i\varepsilon)} \end{aligned}$$

où la deuxième égalité est obtenue en effectuant le changement de variable $t \mapsto -t$.

On applique le Théorème de Convergence Dominée pour calculer la limite en $\varepsilon \to 0$.

— Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{1}_{[0,\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t)\frac{-1}{(-i\varepsilon+t)^x(1+t-i\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{[0,R]}\frac{-1}{(t\,\mathrm{e}^{2i\pi})^x(1+t)}$ en tenant compte de la détermination du logarithme choisie, l'argument de $-i\varepsilon+t$ tend vers 2π.

— Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $\left|\mathbb{1}_{[0,\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t)\frac{1}{(-i\varepsilon+t)^x(1+t-i\varepsilon)}\right| \leq \frac{1}{t^x(1+t)}$. En effet, pour $t \in \mathbb{R}_+$,

$$|t-i\varepsilon| = \sqrt{t^2+\varepsilon^2} \geq \sqrt{t^2} = t$$

et de même, $|1+t-i\varepsilon| = \sqrt{(1+t)^2+\varepsilon^2} \geq 1+t$.

De plus, on a vu à la fin de la première étape que $\frac{1}{t^x(1+t)}$ est intégrable (le fait que $x \in [0,1]$ est crucial). On a donc dominé l'intégrande par une fonction intégrable sur $[0,+\infty]$.

Le Théorème de Convergence Dominée donne alors

$$\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,R]}(t)\frac{\mathrm{d}t}{t^x\,\mathrm{e}^{2i\pi x}(1+t)}$$

.

Un deuxième TCD, avec la même domination donne également, pour la limite en $R \to +\infty$

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x\,\mathrm{e}^{2i\pi x}(1+t)}$$

▷ **Intégrale sur γ_4 :**

On paramétrise le segment de manière similaire à γ_2 :

$$\begin{array}{rcrcl}\gamma_4 & : & [0,\sqrt{R^2-\varepsilon^2}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & t & \longmapsto & i\varepsilon + t\end{array}$$

L'intégrale de f sur ce segment devient alors :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z &= \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} \frac{\mathrm{d}t}{(i\varepsilon+t)^x(1+t+i\varepsilon)} \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t)\frac{\mathrm{d}t}{(i\varepsilon+t)^x(1+t+i\varepsilon)}\end{aligned}$$

On applique encore le Théorème de Convergence Dominée pour passer à la limite en $\varepsilon \to 0$:

— Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{1}_{[0,\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t)\frac{1}{(i\varepsilon+t)^x(1+t+i\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{[0,R]}\frac{1}{t^x(1+t)}$ en tenant compte de la détermination du logarithme choisie, l'argument de $i\varepsilon + t$ tend vers 0.

— On domine de la même façon que précédemment : pour $t \in \mathbb{R}_+$, $\left|\mathbb{1}_{[0,\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t)\frac{1}{(i\varepsilon+t)^x(1+t+i\varepsilon)}\right| \leq \frac{1}{t^x(1+t)}$, intégrable sur $[0,+\infty]$.

On obtient donc, après avoir appliqué une nouvelle fois le TCD pour passer à la limite en $R \to +\infty$,

$$\int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$$

▷ **Retour au Théorème des Résidus**

En passant à la limite en $\varepsilon \to 0$, puis en $R \to +\infty$ dans l'égalité donnée par le Théorème des Résidus, on obtient :

$$\begin{aligned}2i\pi\,\mathrm{e}^{-i\pi x} &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}}\left(\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z\right) \\ &= 0 - \mathrm{e}^{-2i\pi x}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} + 0 + \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} \\ &= (1-\mathrm{e}^{-2i\pi x})\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^x(1+t)}\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^x(1+t)} = 2i\pi\frac{\mathrm{e}^{-i\pi x}}{1-\mathrm{e}^{-2i\pi x}} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

On a donc finalement bien montré que pour tout $x \in]0,1[$,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

On étend la validité de cette formule à tout z tel que $\mathrm{Re}(z) \in]0,1[$ par prolongement analytique des fonctions holomorphes $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ et $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ sur cette bande.

5 Prolongement de la fonction Zêta de Riemann au plan complexe

La fonction ζ de Riemann est définie facilement sous forme d'une série pour les complexes de partie réelle strictement plus grande que 1. L'objet de ce développement est de montrer que cette fonction se prolonge en fait en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, dont l'unique pôle se situe en 1 et est simple. Cette preuve est décrite dans le livre de Conway [3].

On utilisera pour ce développement les deux lemmes suivants :

Lemme 1
Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\text{cotan}\left(\frac{it}{2}\right) = \frac{2}{it} - 4it \sum_{n \geq 1} \frac{1}{t^2 + 4n^2\pi^2}$$

Ce lemme est démontré après le développement. Il repose essentiellement sur le théorème des Résidus, appliqué à un contour bien choisi.

Lemme 2
Pour tout $z \in \{\text{Re}(z) \in]0, 1[\}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^z(1+t)} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Ce dernier lemme est démontré dans la preuve de la formule des compléments, dans l'étape 2.

On cherche donc à démontrer le théorème suivant

Théorème 1
ζ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ admettant un pôle simple en 1.

Étape 1 (Relation fonctionnelle avec Gamma)
Soit $x \in]1, +\infty[$. On a vu dans la partie II de la leçon que pour un tel x, la fonction Gamma est bien définie sous sa forme intégrale.
On a $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. On a $n^{-x}\Gamma(x) = \int_0^\infty \left(\frac{t}{n}\right)^x \frac{1}{t} \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.

Le changement de variable $u = \frac{t}{n}$ donne alors

$$n^{-x}\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} \, \mathrm{e}^{-nu} \, \mathrm{d}u$$

On somme alors sur les $n \geq 1$, et on intervertit l'intégrale et la somme en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli (l'intégrande est positive). On obtient :

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} \sum_{n \geq 1} \mathrm{e}^{-nu} \, \mathrm{d}u = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{e^u - 1} \mathrm{d}u \tag{1}$$

Or, la fonction $z \mapsto \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1} \mathrm{d}u$ est holomorphe sur $\text{Re}(z) > 1$.

En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > 1$, il existe $A > \delta > 1$ tel que $A > \mathrm{Re}(z) > \delta > 1$. Alors

$$\left|\frac{u^{z-1}}{e^u - 1}\right| = \frac{u^{\mathrm{Re}(z)-1}}{e^u - 1} \leq \begin{cases} \frac{u^{A-1}}{e^u-1} & \text{Si } u \geq 1 \\ \frac{u^{\delta-1}}{e^u-1} & \text{Si } 0 < u < 1 \end{cases}$$

Or, ce dernier terme est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, car d'une part $\frac{u^{\delta-1}}{e^u-1} \underset{u\to 0}{\sim} u^{\delta-2}$ qui est intégrable sur $]0,1[$ puisque $\delta - 2 > 1 - 2 = -1$, et d'autre part $\frac{u^{A-1}}{e^u-1} \underset{u\to\infty}{\sim} u^{A-2}\,\mathrm{e}^{-u}$ qui est intégrable sur $]1,+\infty[$.

Donc l'intégrale à paramètre est holomorphe sur tout domaine de $\mathbb{C}$ de la forme $A > \mathrm{Re}(z) > \delta$, donc sur $\mathrm{Re}(z) > 1$.

Par ailleurs, les fonctions ζ et Γ sont également holomorphes sur ce domaine, donc leur produit l'est aussi.

L'équation (1) nous donne alors l'égalité de deux fonctions holomorphes sur un ensemble admettant l'axe $]1,+\infty[$ pour points d'accumulation, donc le théorème de prolongement analytique nous assure que

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1}\mathrm{d}u \qquad \text{pour tout } z \text{ tel que } \mathrm{Re}(z) > 1$$

Étape 2 (Prolongement à $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$)
Le problème à un prolongement immédiat avec la formule obtenue en (1) se situe dans l'intégration au voisinage de 0 lorsque z est proche de 1.

On cherche donc à s'affranchir de ce problème en découpant l'intégrale : Pour tout $z \in \mathrm{Re}(z) > 1$

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1}\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u^{z-1}}{e^u - 1}\mathrm{d}u + \int_1^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1}\mathrm{d}u$$

On va maintenant utiliser le développement limité de l'exponentielle au voisinage de 0 pour écrire

$$\frac{1}{e^u - 1} \underset{u\mapsto 0}{=} \frac{1}{u} - \frac{1}{2} + o(1) \tag{2}$$

En particulier, cela nous permet d'affirmer que $\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}$ est bornée au voisinage de 0.

Ainsi, on écrit

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{u^{z-1}}{e^u - 1}\mathrm{d}u &= \int_0^1 u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u + \int_0^1 u^{z-1}\frac{1}{u}\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u + \frac{1}{z-1}\end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \underbrace{\int_0^1 u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u}_{\text{(a)}} + \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{\text{Pôle en 1}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1}\mathrm{d}u}_{\text{(b)}} \qquad \text{pour } \mathrm{Re}(z) > 1.$$

— (a) : Ce terme est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. En effet, pour $z \in \{\mathrm{Re}(z) > 0\}$, il existe $\delta > 0$ tel que $\delta \leq \mathrm{Re}(z)$. Alors $|u^{z-1}|\left|\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right| \leq u^{\delta-1}M$ où M est une borne de $\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}$ sur $]0,1[$. Cette borne existe bien car on a vu que la fonction était bornée au voisinage de 0, et qu'elle est de plus continue sur $]0,1]$. On peut donc appliquer le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, qui nous donne l'holomorphie du terme (a).

— (b) : Ce terme est également holomorphe sur $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. Pour le montrer, on applique le théorème d'holomorphie sous l'intégrale en dominant sur des domaines de $\mathbb{C}$ de la forme $0 < \mathrm{Re}(z) \leq A$.

Par prolongement analytique, $\zeta.\Gamma$ est donc méromorphe sur $\mathrm{Re}(z) > 0$, avec un pôle simple en 1. De plus, Γ est holomorphe et ne s'annule pas sur $\mathrm{Re}(z) > 0$ donc pour tout $z \in \{\mathrm{Re}(z) > 0\}$,

$$\zeta(z) = \underbrace{\frac{1}{\Gamma(z)}}_{Holomorphe} \times \underbrace{\left(\int_0^1 u^{z-1} \left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right) \mathrm{d}u + \frac{1}{z-1} + \int_1^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1} \mathrm{d}u \right)}_{\text{Méromorphe}}$$

.

On a donc prolongé ζ en une fonction méromorphe sur $\mathrm{Re}(z) > 0$, avec un pôle simple en 1, de Résidu 1.

Étape 3 (Prolongement à $-1 < \mathrm{Re}(z) < 0$)
On réutilise la relation fonctionnelle obtenue à l'étape précédente pour $z \in \{0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$. On remarque que pour $-1 < \mathrm{Re}(z) < 1$, la fonction $u \mapsto u^{z-2}$ est intégrable sur $]1, +\infty[$ et que $-\int_1^\infty u^{z-2} \mathrm{d}u = \frac{1}{z-1}$.

On utilise cette remarque dans la relation fonctionnelle : pour $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\zeta(z)\Gamma(z) &= \int_0^1 u^{z-1} \left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right) \mathrm{d}u - \int_1^\infty u^{z-2} \mathrm{d}u + \int_1^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1} \mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 u^{z-1} \left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}u - \int_0^1 \frac{u^{z-1}}{2} \mathrm{d}u + \int_1^\infty u^{z-1} \left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right) \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

où on a, pour la dernière égalité, rajouté le terme suivant du développement de $\frac{1}{\mathrm{e}^u - 1}$ au voisinage de 0.

On développe à un ordre supérieur l'expression (2) : $\frac{1}{e^u - 1} \underset{u \mapsto 0}{=} \frac{1}{u} - \frac{1}{2} + O(u)$ qui nous permet d'affirmer que

$$u^{z-1} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) \underset{u \to 0}{\sim} M u^z$$

qui est intégrable sur $]0, 1[$. Ainsi la fonction

$$z \mapsto \int_0^1 u^{z-1} \left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}u$$

est holomorphe sur le domaine $-1 < \mathrm{Re}(z) < 1$ (Appliquer le théorème d'holomorphie sous l'intégrale en dominant sur un domaine de la forme $-1 < \delta \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$).

Par ailleurs, $\int_0^1 \frac{u^{z-1}}{2} \mathrm{d}u = -\frac{1}{2z}$.

Enfin, la fonction $z \mapsto \int_1^\infty u^{z-1} \left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right) \mathrm{d}u$ est holomorphe sur le domaine $\mathrm{Re}(z) < 1$ (séparer la fraction en deux, et appliquer le théorème d'holomorphie. On domine l'intégrande de la première en majorant simplement u^{z-1} par 1, et la seconde sur des domaines de la forme $Re(z) \leq \delta < 1$).

On obtient donc, pour $-1 < \mathrm{Re}(z) < 1$, et puisque Γ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\zeta(z) &= \frac{1}{\Gamma(z)} \times \left(\int_0^1 u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}u - \int_0^1 \frac{u^{z-1}}{2}\mathrm{d}u + \int_1^\infty u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^1 u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}u - \frac{1}{2\Gamma(z)z} + \frac{1}{\Gamma(z)}\int_1^\infty u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u \\
&= \underbrace{\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^1 u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}u}_{\text{Holomorphe}} - \underbrace{\frac{1}{2\Gamma(z+1)}}_{\text{Holomorphe car Re}(z+1)>0} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(z)}\int_1^\infty u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u}_{\text{Holomorphe}}
\end{aligned}$$

On a donc prolongé ζ au domaine $-1 < \mathrm{Re}(z) < 0$.

Étape 4 (Prolongement à $\mathrm{Re}(z) < -1$)
On a obtenu à l'étape précédente la formule suivante pour tout $-1 < \mathrm{Re}(z) < 0$:

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^1 u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}u - \frac{1}{2z} + \int_1^\infty u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u$$

On remarque que pour $-1 < \mathrm{Re}(z) < 0$, $u \mapsto u^{z-1}$ est intégrable sur $]1, +\infty[$, et que $-\frac{1}{2z} = \int_1^\infty \frac{1}{2}u^{z-1}\mathrm{d}u$.

On a alors, en regroupant les termes,

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}u.$$

On remarque que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{1}{e^u-1} + \frac{1}{2} = \frac{i}{2}\mathrm{cotan}\left(\frac{iu}{2}\right)$$

On utilise ensuite la formule de la cotangente énoncée au lemme 1. On a donc

$$\frac{1}{e^u-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{u} + 2u\sum_{n\geq 1}\frac{1}{u^2+4n^2\pi^2}$$

Soit maintenant $x \in]-1, 0[$. En combinant l'équation fonctionnelle précédemment obtenue, valable pour de tels x, et le calcul sur la cotangente, on obtient :

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1}\left(2u\sum_{n\geq 1}\frac{1}{u^2+4n^2\pi^2}\right)\mathrm{d}u$$

L'intégrande étant positive, on applique Fubini-Tonnelli, puis on réalise le changement de variable $t = \frac{u}{2n\pi}$, à n fixé :

$$\zeta(x)\Gamma(x) = 2\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty \frac{u^x}{u^2+4n^2\pi^2}\mathrm{d}u \overset{F.T}{=} 2\int_0^\infty \frac{t^x}{1+t^2}\mathrm{d}t \times \underbrace{\sum_{n\geq 1}(2n\pi)^{x-1}}_{=(2\pi)^{x-1}\zeta(1-x)}$$

Par ailleurs, le changement de variable $v = t^2$ et le lemme 2 donnent pour l'intégrale restante :

$$\int_0^\infty \frac{t^x}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{v^{\frac{1}{2}(x-1)}}{1+v}\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2}(1-x))}$$

On termine le calcul à l'aide de formules trigonométriques :

$$\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2}(1-x))} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}\sin(\frac{\pi}{2}x)$$

Revenons maintenant à ζ. On a obtenu, toujours pour $x \in]-1, 0[$,

$$\zeta(x) = \frac{2}{\Gamma(x)}\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\sin(\frac{\pi}{2}x)(2\pi)^{x-1}\zeta(1-x)$$

La formule des compléments, valable sur $\mathbb{C}$ privé des entiers, donc sur $]-1, 0[$, donne encore $\frac{1}{\Gamma(x)}\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \Gamma(1-x)$.

D'où finalement

$$\zeta(x) = 2\Gamma(1-x)\sin(\frac{\pi}{2}x)(2\pi)^{x-1}\zeta(1-x)$$

Or, $\mathrm{Re}(z) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(1-z) > 1$, et la fonction $z \mapsto 2\Gamma(1-z)\sin(\frac{\pi}{2}z)(2\pi)^{z-1}\zeta(1-z)$ est holomorphe sur $\mathrm{Re}(z) < -1$ (on utilise ici en particulier le fait que ζ est une fonction holomorphe sur $\mathrm{Re}(z) > 1$).

La théorème de prolongement analytique nous permet de conclure, et de prolonger ζ en une fonction holomorphe sur $\mathrm{Re}(z) < 0$.

On a donc bien prolongé ζ en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, admettant un unique pôle, en 1, de résidu 1.

Preuve du lemme 1

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. On va appliquer le théorème des résidus à la fonction

$$\mathrm{f} : z \mapsto \frac{\pi}{z^2 - a^2}\mathrm{cotan}(\pi z)$$

qui est méromorphe de pôles a, $-a$, et tous les entiers, sur le contour rectangulaire ci-après, où n est choisi de façon à ce que le point a se trouve à l'intérieur du contour. En faisant ensuite tendre n vers $+\infty$, on obtiendra le résultat souhaité.

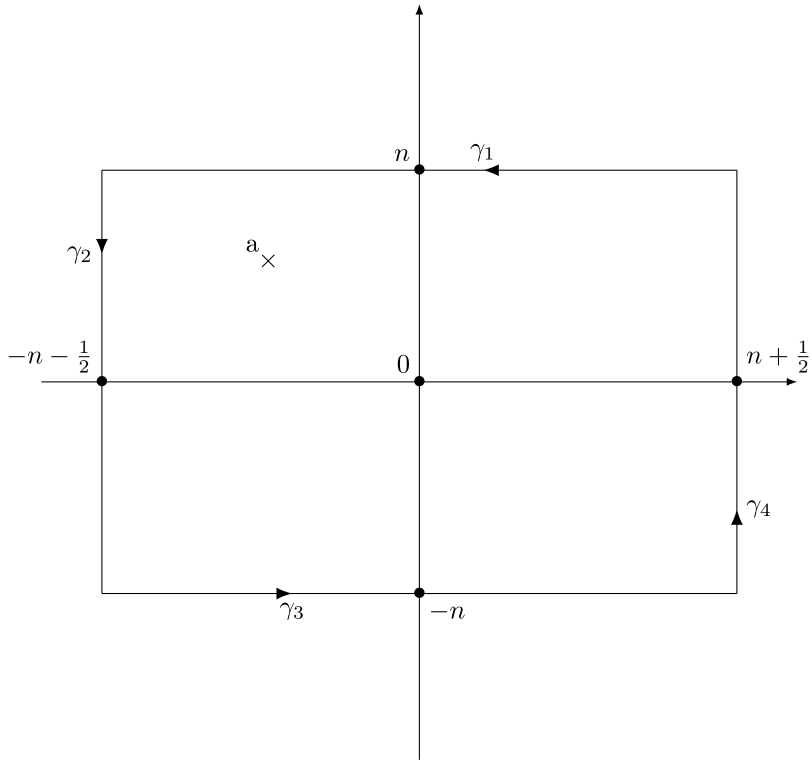

Figure 3 – Contour d'intégration pour la formule de la cotangente

Ces choix sont motivés par le fait qu'ainsi, le contour englobe plusieurs pôles de la fonction f sans en rencontrer : a, $-a$, et les entiers compris entre $-n$ et n inclus.

Le théorème des Résidus donne alors :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{Res}(f,a) + \mathrm{Res}(f,-a) + \sum_{|k|\leq n} \mathrm{Res}(f,k)$$

On calcule :

— a est un pôle simple de f. Donc $\mathrm{Res}(f,a) = (z-a)f(z)|_{z=a} = \frac{\pi}{2a}\mathrm{cotan}(\pi a)$

— $-a$ est également un pôle simple de f, donc $\mathrm{Res}(f,-a) = -\frac{\pi}{2a}\mathrm{cotan}(-\pi a) = \frac{\pi}{2a}\mathrm{cotan}(\pi a)$

— soit $k \in [\![0,n]\!]$, k est un pôle simple de cotan, car c'est un zéro simple de la fonction sin. Donc $\mathrm{Res}(f,k) = \lim\limits_{z\to k}(z-k)f(z) = \frac{\pi\cos(\pi k)}{k^2-a^2} \lim\limits_{z\to k} \frac{z-n}{\sin(\pi z)}$
Or, $\sin(\pi z) = \sin(\pi(z-n)+\pi n) = (-1)^n\sin(\pi(z-n))$.
Donc $\lim\limits_{z\to k} \frac{z-n}{\sin(\pi z)} = (-1)^n \lim\limits_{z\to k} \frac{z-n}{\sin(\pi(z-n))} = \frac{(-1)^n}{\pi}$.
D'où finalement $\mathrm{Res}(f,k) = \frac{1}{k^2-a^2} = \mathrm{Res}(f,-k)$. On va donc, dans la somme, isoler le terme $k=0$ et regrouper les opposés.

On a alors obtenu

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{a}\mathrm{cotan}(\pi a) - \frac{1}{a^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2-a^2}$$

Étape 1 (Majoration de cotan sur le contour)
Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $z = x+iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.

Alors, grâce à la formule de Moivre, on a $\cos(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz}+\mathrm{e}^{-iz}}{2} = \frac{\cos(x)\left(\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y}\right)+i\sin(x)\left(\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{y}\right)}{2} = \cos(x)\cosh(y)+i\sin(x)\sinh(-y)$.
On passe au module pour obtenir $|\cos(z)|^2 = \cos(x)^2 + \sinh(y)^2$

De même, on a $\sin(z) = i\sin(x)\cosh(y) + \cos(x)\sinh(-y)$, donc $|\sin(z)|^2 = \sin(x)^2 + \sinh(y)^2$.

On obtient donc $|\mathrm{cotan}(\pi z)|^2 = \frac{\cos(\pi x)^2+\sinh(\pi y)^2}{\sin(\pi x)^2+\sinh(\pi y)^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

— Si $|x| = n + \frac{1}{2}$, c'est à dire si z est sur γ_2 ou γ_4, alors $\cos(\pi x) = \cos(\pm\pi(n+\frac{1}{2})) = 0$. Donc $|\mathrm{cotan}(\pi z)|^2 = \frac{\sinh(\pi y)^2}{1+\sinh(\pi y)^2} \leq 1$
— Si $|y| = n$, c'est à dire si z est sur γ_1 ou γ_3, alors on minore $\sin(\pi x)^2 + \sinh(\pi y)^2 \geq \sinh(\pi y)^2$, et on majore $\cos(\pi y)^2 \leq 1$ pour obtenir $|\mathrm{cotan}(\pi z)|^2 \leq \frac{1+\sinh(\pi n)^2}{\sinh(\pi n)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi, cotan est bornée sur le contour.

Donc il existe $M > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \gamma_n$, $|\mathrm{cotan}(\pi z)| \leq M$.

Étape 2 (Convergence des intégrales sur le contour)
On va pouvoir grâce à la majoration effectuée précédemment, contrôler la valeur des intégrales sur le contour lorsque $n \to \infty$.

▷ Sur γ_1, on paramètre le segment comme suit :

$$\gamma \quad : \quad \begin{array}{rcl} [-n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & in - t \end{array}$$

On a alors, en appliquant l'inégalité triangulaire et en utilisant la majoration démontrée précédemment :

$$\left|\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_{-n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\pi}{|in-t|^2 - |a|^2} M\mathrm{d}t \leq \pi M \frac{2n+1}{n^2-|a|^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Car n est choisi tel que $|a| < n$.

▷ On traite de la même façon les intégrales sur les autres segments, pour obtenir

$$\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall k \in \{1,2,3,4\}$$

Étape 3 (Conclusion)
On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \quad \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{a}\mathrm{cotan}(\pi a) - \frac{1}{a^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k^2-a^2}\right)$$

Et la série converge, donc

$$0 = \frac{\pi}{a}\mathrm{cotan}(\pi a) - \frac{1}{a^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2-a^2}$$

Ce qui donne encore

$$\boxed{\text{Pour tout } a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}, \quad \mathrm{cotan}(\pi a) = \frac{1}{\pi a} - \frac{2a}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2} \qquad \text{Pour tout } a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}$$

Pour le prolongement de ζ, on cherche à calculer $\frac{i}{2}\text{cotan}(i\frac{u}{2})$, avec $u \in \mathbb{R}$. On peut donc appliquer la formule que l'on vient de démontrer, puisque pour tout $u \in \mathbb{R}$, $i\frac{u}{2} \notin \mathbb{Z}$. On pose alors $i\frac{u}{2} = \pi a$, et simplifiant les expressions, on trouve bien

$$\frac{i}{2}\text{cotan}(i\frac{u}{2}) = \frac{1}{u} + 2u\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2\pi^2 + u^2}$$