Théorème de Cauchy-Lipschitz [1]

Leçons : 203, 206, 220, 221, *205, 208*

[Rou], exercice 60

Théorème

Soient $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^m$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application continue et globalement lipschitzienne en la 2$^{\text{e}}$ variable au sens suivant :

$$\forall K \subset I \text{ intervalle compact}, \exists k > 0, \forall t \in K, \forall y, z \in \mathbb{R}^m, \|f(t,y) - f(t,z)\| \leqslant k\|y-z\|.\ ^{2}$$

Alors, si $t_0 \in I$ et $x \in \mathbb{R}^m$ sont donnés, le problème de Cauchy (P) : $\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t))\ ^{3} \\ y(t_0) = x \end{cases}$ admet une unique solution définie sur I tout entier.

Démonstration :

→ **Cas 1 :** Supposons que I soit compact.

1. On va se ramener à un problème de point fixe.
   Dire que y est solution de (P) signifie que y est dérivable sur I, et même $\mathcal{C}^1$, vu que f est continue.
   Ainsi, on a : $\forall t \in I, y(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,\mathrm{d}s.$ [4]
   Réciproquement, si y est continue et vérifie cette égalité, alors y est $\mathcal{C}^1$ et c'est une solution de (P).
   Ainsi, y est une solution de $(P) \Leftrightarrow y = F(y)$ où $F : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^m) & \to & \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^m) \\ y & \mapsto & \left(t \mapsto x + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,\mathrm{d}s\right) \end{array} \right.$.
2. Montrons que F possède un unique point fixe.
   Soit k la constante de Lipschitz de f associée à l'intervalle compact I [5] et l la longueur de I.
   On munit $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^m)$ de la norme $N_k(y) = \max_{t\in I} \left(\mathrm{e}^{-k|t-t_0|}\|y(t)\|\right)$.
   On vérifie facilement que c'est une norme sur $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^m)$, car I est compact, $\|.\|$ est une norme, et exp est à valeurs strictement positives.
   De plus, $\forall y \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^m), \mathrm{e}^{-kl}\|y\|_\infty \leqslant N_k(y) \leqslant \|y\|_\infty$; ainsi N_k et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes.
   Comme $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^m)$ est complet pour $\|.\|_\infty$, il l'est aussi pour N_k.
   Et comme $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^m)$ est stable par F, pour pouvoir appliquer le théorème de Picard, on veut montrer que F est contractante.
   Soient $y, z \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^m)$, $t \in I$ avec $t \geqslant t_0$:

$$F(y)(t) - F(z)(t) = \int_{t_0}^{t} \left(f(s,y(s)) - f(s,z(s))\right)\mathrm{d}s.$$

En conséquence, on obtient la suite d'inégalités :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-k(t-t_0)}\|F(y)(t) - F(z)(t)\| &\leqslant \mathrm{e}^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \|f(s,y(s)) - f(s,z(s))\|\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} k\|y(s) - z(s)\|\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-k(t-t_0)} N_k(y-z) \int_{t_0}^{t} k\mathrm{e}^{k(s-t_0)}\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-k(t-t_0)} N_k(y-z)\left(\mathrm{e}^{k(t-t_0)} - 1\right) \\
&\leqslant N_k(y-z)\left(1 - \mathrm{e}^{-k(t-t_0)}\right)
\end{aligned}$$

1. S'il reste du temps, on peut utiliser le théorème pour montrer l'existence d'une unique solution à l'équation du pendule.
2. Dans le cas linéaire, on oublie f et on remplace par $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_m(\mathbb{R}))$ et $b \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^m)$.
3. Ou $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$.
4. A et b sont continues, aucun problème dans le cas linéaire. Ici, et dans la suite, on remplacera $f(s,y(s))$ par l'expression $A(s)y(s) + b(s)$.
5. Dans le cas linéaire, on pose $k = \max_{t\in I} |||A(t)|||$, où $|||.|||$ est la norme subordonnée à $\|.\|$.

Similairement, on aurait pu montrer, dans le cas où $t \leqslant t_0$, que :

$$\mathrm{e}^{-k(t_0-t)}\|F(y)(t)-F(z)(t)\| \leqslant N_k(y-z)\left(1-\mathrm{e}^{-k(t_0-t)}\right).$$

En définitive, on a :

$$\forall t \in I, \mathrm{e}^{-k|t-t_0|}\|F(y)(t)-F(z)(t)\| \leqslant N_k(y-z)\left(1-\mathrm{e}^{-k|t-t_0|}\right).$$

On prend alors le maximum sur I, et on obtient :

$$N_k(F(y)-F(z)) \leqslant \underbrace{\left(1-\mathrm{e}^{-kl}\right)}_{<1} N_k(y-z).$$

F est donc contractante sur $\left(\mathcal{C}\left(I, \mathbb{R}^m\right), N_k\right)$ donc admet un unique point fixe.

$\rightarrow$ **Cas 2 :** Reste donc à traiter le cas général où I est intervalle quelconque.

On peut écrire l'intervalle I comme union croissante d'intervalles compacts : $I = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$, avec la contrainte $t_0 \in I_j$, pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Par ce qui précède, on peut définir y_j, la solution de (P) sur I_j.

- Soit alors y une solution de (P) sur I ; par unicité sur I_j, on a donc : $y_{|I_j} \equiv y_j$.
  On obtient ainsi l'unicité de y sur I.
- Réciproquement, les y_j se raccordent, par unicité sur I_j, et donc $y : t \mapsto y_j(t)$ si $t \in I_j$ est bien définie.

Le problème sur un intervalle I quelconque admet donc une unique solution définie sur I tout entier. ■

Références

[Rou] F. ROUVIÈRE – *Petit guide de calcul différentiel*, 4[e] éd., Cassini, 2014.