Développement asymptotique de la série harmonique

Leçons : ***223, 224, 230***

[X-ENS An1], exercice 3.18

On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; cherchons le développement asymptotique de H_n quand n tend vers l'infini.

1. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$; on va montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   En effet :
   - Déjà, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - v_n = \frac{1}{n} > 0$ et $u_n - v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
   - D'une part, l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ (valable pour $x > -1$) fournit la décroissance de (u_n) :
   $$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant 0.$$
   - D'autre part, la suite (v_n) croît, car $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0$.

   Donc, en tant que suites adjacentes, (u_n) et (v_n) convergent, vers la même limite ; cette limite, qu'on notera γ, s'appelle la constante d'Euler [1].
2. Du coup, on a montré que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ quand $n \to \infty$.
   On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = u_n - \gamma$.
   Lorsque $n \to \infty$, on a : $t_n - t_{n-1} = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2}$.
   Ainsi, la série $\sum_{k \geqslant 2} (t_k - t_{k-1})$ converge.
   Par théorème de sommation des équivalents, on obtient :
   $$t_n = -\sum_{k=n+1}^{\infty} (t_k - t_{k-1}) \underset{n\to\infty}{\sim} -\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{-1}{2k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$
3. On va justement chercher un équivalent simple de la quantité $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, où $\alpha > 1$.
   Comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante et intégrable sur $[1, +\infty[$, on a :
   $$\forall k \geqslant 2, \forall t \in [k, k+1], \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{(t-1)^\alpha}.$$
   En intégrant, on en déduit que : $\forall k \geqslant 2$, $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
   D'où, en sommant entre $n+1$ et N, puis en faisant tendre N vers l'infini (on a vu que les quantités convergent) :
   $$\int_{n+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$
   Comme les deux intégrales sont équivalentes à $\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$, le cas $\alpha = 2$ fournit alors : $t_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.
   Désormais, on a montré que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
4. Continuons, et posons désormais, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$; on a donc $w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
   En conséquence, la somme $\sum_{k=n+1}^{\infty} (w_k - w_{k-1})$ vaut $-w_n$.

1. Valeur approchée par défaut : $\gamma \simeq 0,577215$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n - w_{n-1} = u_n - u_{n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2} = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2}$.
Donc, quand $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}
w_n - w_{n-1} &= -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}
\end{aligned}$$

Ensuite, par sommation des équivalents, $w_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{6}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{-1}{6}\frac{1}{2n^2} = \frac{-1}{12n^2}$.

Donc, on va s'arrêter [2] avec le développement suivant : $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

5. Pour finir, notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $k_n = \min\{k \in \mathbb{N} | H_k \geqslant n\}$ (le rang auquel la série harmonique dépasse la valeur n).
   On va déduire du développement asymptotique de H_n la valeur de $\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n}$. [3]
   On pose $H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$, où $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Par définition de k_n, on a : $\ln k_n + \gamma + \varepsilon_{k_n} \geqslant n$ et $\ln(k_n - 1) + \gamma + \varepsilon_{k_n - 1} < n$.
   Puis $k_n \geqslant \exp(n - \gamma - \varepsilon_{k_n})$ et $k_n - 1 < \exp(n - \gamma - \varepsilon_{k_n-1})$.
   D'où l'encadrement $\exp(n - \gamma - \varepsilon_{k_n}) \leqslant k_n < \exp(n - \gamma - \varepsilon_{k_n-1}) + 1$.
   Ainsi, $k_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{n-\gamma}$ puis $\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e$.

Références

[X-ENS An1] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS – *Oraux X-ENS Analyse 1*, 3e éd., Cassini, 2014.

2. C'est déjà assez chiant comme ça...
3. On s'occupe comme on peut !