Méthode de Newton [1]

Leçons : 226, 229, 232, 253, *206, 218, 219, 223, 224, 228*

[Rou], exercice 49

Théorème

Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
On suppose $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c,d]$; f s'annule donc en un unique point de $]c,d[$, noté a.
Pour $x_0 \in [c,d]$, on pose tant qu'on peut $x_{n+1} = F(x_n)$, où $F : x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

1. Il existe $C > 0$, tel que si $|x_0 - a| < \dfrac{1}{C}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, x_n$ est bien défini et $|x_n - a| \leqslant |x_0 - a|$.
   Dans ce cas, (x_n) converge vers a à vitesse quadratique.
2. Si $f'' > 0$ sur $[c,d]$ et $x_0 > a$, alors la suite (x_n) est bien définie, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > a$.
   Dans ce cas, on a l'équivalent : $x_{n+1} - a \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.

Démonstration :

Étape 1 : Soit $x \in [c,d]$, comme $f(a) = 0$, on a :

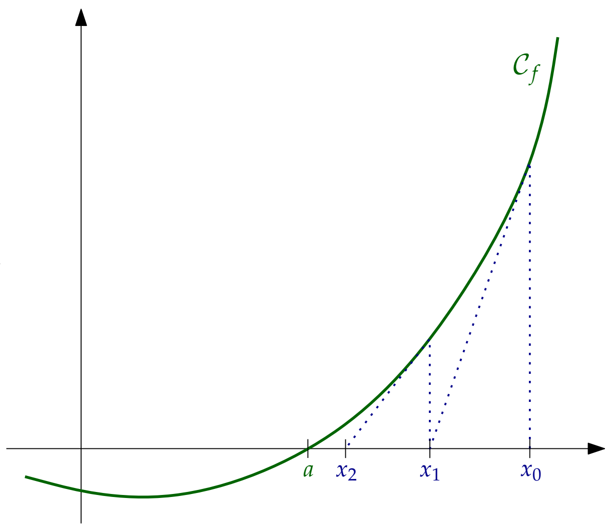
$$\begin{aligned} F(x) - a &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a \\ &= x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} \\ &= \frac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

Et par l'égalité de Taylor-Lagrange, il existe z compris strictement entre a et x, tel que :

$$f(a) - f(x) - (a-x)f'(x) = \frac{(a-x)^2}{2} f''(z)$$

On en déduit donc :

$$F(x) - a = \frac{f''(z)}{2f'(x)}(x-a)^2$$



Étape 2 : Montrons la première partie du théorème.

On pose $C = \dfrac{\max|f''|}{2\min|f'|}$; C est bien défini car f'' et f' sont continues sur le segment $[c,d]$, intervalle sur lequel $f' > 0$.
On a alors : $|F(x) - a| \leqslant C|x-a|^2$.
Soit $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{C}\right[$, tel que $I := [a-\alpha, a+\alpha] \subset [c,d]$;
Alors $\forall x \in I, |F(x) - a| \leqslant C\alpha^2 < \alpha$, donc $F(x) \in I$ puis $F(I) \subset I$.

1. On dispose d'une application. Soit $y \in \mathbb{R}^{+*}$; imaginons qu'on veuille estimer $a = \sqrt{y}$. Soit $f : x \mapsto x^2 - y$, définie sur un intervalle $[c,d]$, avec $0 < c < d$ et $c^2 < y < d^2$. Pour approcher a, on doit itérer la fonction $F(x) = x - \dfrac{x^2 - y}{2x}$.
On a alors : $F(x) - a = \dfrac{(x-a)^2}{2x}$ et $F(x) + a = \dfrac{(x+a)^2}{2x}$.
Donc, en prenant $x_0 \in]a,d]$ et en posant $x_n = F^n(x_0)$, on obtient : $\dfrac{x_n + a}{x_n - a} = \left(\dfrac{x_0 + a}{x_0 - a}\right)^{2^n}$.
Par conséquent : $1 + \dfrac{2a}{x_n - a} = \left(1 + \dfrac{2a}{x_0 - a}\right)^{2^n} \geqslant 1 + \left(\dfrac{2a}{x_0 - a}\right)^{2^n}$.
On obtient donc un encadrement de l'erreur : $0 < x_n - a \leqslant 2a\left(\dfrac{x_0 - a}{2a}\right)^{2^n}$.

Par conséquent, si $x_0 \in I$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in I$ et $|x_{n+1} - a| = |F(x_n) - a| \leqslant C|x_n - a|^2$.
Et par une récurrence immédiate, il vient :

$$C|x_n - a| \leqslant (C|x_{n-1} - a|)^2 \leqslant \ldots \leqslant (C|x_0 - a|)^{2^n} \leqslant (C\alpha)^{2^n}$$

Ce qui prouve la convergence d'ordre 2 de (x_n) vers a car $C\alpha < 1$, dans le cas où $|x_0 - a| \leqslant \alpha$.

Étape 3 : Utilisons désormais l'hypothèse supplémentaire : $f'' > 0$ sur le segment $[c, d]$.
Pour $x \in]a, d]$, on a : $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} < x$ car $f' > 0$ et f s'annule en a.
D'autre part : $\exists z \in]a, x[, F(x) - a = \dfrac{f''(z)}{2f'(x)}(x - a)^2 > 0$ car f'' et f' sont strictement positives.
Ainsi, $\forall x \in]a, d], a < F(x) < x \leqslant d$, donc $]a, d]$ est stable par F.
On a même : si $x_0 \in]a, d]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in]a, d]$ et la suite (x_n) décroît.
Comme (x_n) est également minorée par a, la suite (x_n) converge ; on note $l \in [a, d]$ sa limite.
l est un point fixe de F donc par conséquent $f(l) = 0$ et donc $l = a$.
Comme dans le cas précédent, $|x_{n+1} - a| \leqslant C|x_n - a|^2$ et donc la convergence est quadratique.

Étape 4 : Enfin, cette inégalité est essentiellement optimale.
Si $a < x_0 \leqslant d$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in]a, d]$ et $\exists z_n \in]a, x_n[, \dfrac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(z_n)}{f'(x_n)}$.
Par continuité de f' et f'', on déduit $\dfrac{f''(z_n)}{2f'(x_n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{f''(a)}{2f'(a)}$, d'où finalement :

$$x_{n+1} - a \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$$

■

Références

[Rou] F. ROUVIÈRE – *Petit guide de calcul différentiel*, 4e éd., Cassini, 2014.