Partitions d'un entier en parts fixées

Leçons [1] : 124, 126, 140, 190, *102, 224*

[X-ENS An2], exercice 3.15

Théorème

Soient $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux dans leur ensemble.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n = \#\left\{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \middle| a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k = n\right\}$$

Alors on a :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Démonstration :

Étape 1 : Considérons le produit de Cauchy des séries formelles $\sum\limits_{x_i=0}^{\infty} X^{a_i x_i}$, pour $i \in [\![1, k]\!]$.

On note $f(X)$ ce produit de Cauchy ; on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} f(X) &= \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{x_i=0}^{\infty} X^{a_i x_i} \right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - X^{a_i}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{N}^k \\ a_1x_1+\ldots+a_kx_k=n}} 1 \right) X^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n \end{aligned}$$

Étape 2 : Décomposons la fraction rationnelle $f(X)$ en éléments simples.

La série formelle $f(X)$ est la série génératrice de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; c'est une fraction rationnelle dont les pôles sont les racines $a_1^{\text{èmes}}, \ldots, a_k^{\text{èmes}}$ de l'unité.

Le pôle 1 est de multiplicité k.

Soit $\omega \neq 1$ un pôle de f. Comme $\frac{1}{1 - X^{a_i}}$, où $i \in [\![1, k]\!]$, n'a que des pôles simples, ω est de multiplicité inférieure ou égale à k. Par l'absurde, on suppose que ω soit un pôle de multiplicité k.

On aurait alors : $\forall i \in [\![1, k]\!], \omega^{a_i} = 1$.

Or, d'après le théorème de Bézout, les $(a_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ étant premiers entre eux dans leur ensemble :

$$\exists\, (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{Z}^k, a_1 u_1 + \ldots + a_k u_k = 1$$

Alors $\omega = \omega^{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i u_i} = \prod\limits_{i=1}^{k} (\omega^{a_i})^{u_i} = 1$.

Contradiction ! On en déduit donc que la multiplicité du pôle $\omega \neq 1$ est strictement inférieure à k.

Notons $\mathcal{P} = \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$ l'ensemble des pôles de $f(X)$, avec $\omega_1 = 1$.

Par décomposition en éléments simples, il existe $c_{i,j} \in \mathbb{C}$ pour $i \in [\![1, p]\!]$, $j \in [\![1, k-1]\!]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, tels que :

$$f(X) = \frac{\alpha}{(1 - X)^k} + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant k-1}} \frac{c_{i,j}}{(\omega_i - X)^j}$$

Étape 3 : Développons en série formelle les éléments simples de $f(X)$.

En effet, pour $\omega \in \mathcal{P}$ et $j \in [\![1, k]\!]$, $\frac{1}{(\omega - X)^j}$ est développable en série formelle. Ses coefficients

1. Pas besoin d'arguments d'analyse dans ce développement, les séries formelles suffisent. Il est donc tout à fait artificiel de faire ce développement avec des séries entières pour le caser en analyse.

s'obtiennent en dérivant $(j-1)$ fois le développement en série formelle de $\dfrac{1}{\omega - X}$.
On a :

$$\frac{1}{\omega - X} = \frac{1}{\omega}\frac{1}{1-\frac{X}{\omega}} = \frac{1}{\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{X}{\omega}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{\omega^{n+1}}$$

Puis, pour $j \in [\![1,k]\!]$,

$$\frac{(j-1)!}{(\omega-X)^j} = \sum_{n=j-1}^{\infty} n(n-1)\dots(n-j+2)\frac{X^{n-j+1}}{\omega^{n+1}}$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{(\omega-X)^j} = \sum_{n=j-1}^{\infty}\frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!}\frac{X^{n-j+1}}{\omega^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+j-1)!}{(j-1)!n!}\frac{X^n}{\omega^{n+j}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{n}\frac{X^n}{\omega^{n+j}}$$

Ainsi :

$$f(X) = \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}X^n + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant k-1}} c_{i,j}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{n}\frac{X^n}{\omega^{n+j}}\right)$$

Étape 4 : Déduisons-en un équivalent de u_n en l'infini.
La dernière expression de $f(X)$ nous fournit, par unicité du développement en série formelle :

$$u_n = \alpha\binom{n+k-1}{n} + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant k-1}} c_{i,j}\binom{n+j-1}{n}\frac{1}{\omega^{n+j}}$$

Or, pour $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dbinom{n+r-1}{n} = \dfrac{(n+r-1)\dots(n+1)}{(r-1)!} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n^{r-1}}{(r-1)!}$.
Ainsi, $\alpha\dbinom{n+r-1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \alpha\dfrac{n^{r-1}}{(r-1)!}$
Et $\forall i \in [\![1,p]\!], \forall j \in [\![1-k-1]\!], c_{i,j}\dbinom{n+j-1}{n}\dfrac{1}{\omega^{n+j}} = o\left(n^{k-1}\right)$, car les pôles de $\mathcal{P}$ sont des racines de l'unité, donc de module 1.
Par conséquent,

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \alpha\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Reste à calculer α.
Pour cela, on multiplie $f(X)$ par $(1-X)^k$ et on substitue 1 à X :[2]

$$(1-X)^k f(X) = \prod_{i=1}^{k}\frac{1-X}{1-X^{a_i}} = \prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1+X+\dots+X^{a_i-1}}$$

$$\alpha + 0 = \prod_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}$$

D'où :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{a_1\dots a_k}\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

■

Références

[X-ENS An2] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS – *Oraux X-ENS Analyse 2*, 2e éd., Cassini, 2009.

2. Pour le membre de gauche, on effectue la substitution dans l'expression obtenue à la fin de l'étape 2. Dans le cadre des séries formelles, on rappelle qu'on ne peut substituer à X que des séries formelles de valuation non-nulle ; on ne peut donc pas se placer dans ce cadre pour effectuer cette substitution.