

Comment résoudre numériquement des EDS rétrogrades ?

Florian Lemonnier

Séminaire Gaussbusters, Rennes

26 février 2018

1 Introduction

- Méthode d'Euler pour les EDS
- Petits rappels sur les EDSR
- Tentative de méthode d'Euler pour les EDSR

2 EDSR discrètes

- Approximation discrète du Brownien
- Résolution d'une EDSR discrète
- Schéma de résolution explicite

3 Simulation en Python

- Algorithme de résolution
- L'intérêt de tout cela

1 Introduction

- Méthode d'Euler pour les EDS
- Petits rappels sur les EDSR
- Tentative de méthode d'Euler pour les EDSR

2 EDSR discrètes

- Approximation discrète du Brownien
- Résolution d'une EDSR discrète
- Schéma de résolution explicite

3 Simulation en Python

- Algorithme de résolution
- L'intérêt de tout cela

On se donne un mouvement brownien B k -dimensionnel, défini sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dont la filtration naturelle augmentée est notée $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Pour les EDS, c'est facile !

On veut résoudre :

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, \quad X_0 = x.$$

Pour les EDS, c'est facile !

On veut résoudre :

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, \quad X_0 = x.$$

On prend un **petit pas de temps** h et sous de bonnes hypothèses sur b et σ , on dit que :

$$\begin{aligned} X_h &= x + \int_0^h b(s, X_s) ds + \int_0^h \sigma(s, X_s) dB_s \\ &\simeq x + b(0, x)h + \sigma(0, x)\sqrt{h}N, \end{aligned}$$

avec $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Et on recommence pour X_{2h} , etc.

C'est quoi une EDSR ?

Première intuition sur ce qu'est une EDSR :

$$dY_t = -f(t, Y_t) dt + g(t, Y_t) dB_t, \quad Y_T = \xi.$$

C'est quoi une EDSR ?

Première intuition sur ce qu'est une EDSR :

$$dY_t = -f(t, Y_t) dt + g(t, Y_t) dB_t, \quad Y_T = \xi.$$

Problème, **la plus simple de ces équations est mal posée !** En effet,

$$dY_t = 0, \quad Y_T = \xi,$$

admet pour solution $Y_t = \xi$ pour tout $t \in [0, T]$. Ça n'est **pas adapté !** Pour corriger cela, on peut regarder si $\mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_t]$ vérifie une équation "sympa".

C'est quoi une EDSR ?

Première intuition sur ce qu'est une EDSR :

$$dY_t = -f(t, Y_t) dt + g(t, Y_t) dB_t, \quad Y_T = \xi.$$

Problème, **la plus simple de ces équations est mal posée !** En effet,

$$dY_t = 0, \quad Y_T = \xi,$$

admet pour solution $Y_t = \xi$ pour tout $t \in [0, T]$. Ça n'est **pas adapté !** Pour corriger cela, on peut regarder si $\mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_t]$ vérifie une équation "sympa".

Théorème (Représentation des martingales browniennes)

Soit M une (\mathcal{F}_t) -martingale issue de 0 telle que $\forall t \geq 0, \mathbb{E} [|M_t|^2] < \infty$.

Alors il existe un unique processus Z progressivement mesurable et tel que pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t |Z_s|^2 ds \right] < \infty \text{ et } M_t = \int_0^t Z_s dB_s.$$

EDSR bien posées

Forme générale des EDSR :

$$\begin{cases} dY_t = -f(t, Y_t, Z_t) dt + Z_t dB_t, \\ Y_T = \tilde{\xi} \text{ de carré intégrable,} \end{cases}$$

avec $\tilde{\xi}$ va \mathcal{F}_T -mesurable, $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

EDSR bien posées

Forme générale des EDSR :

$$\begin{cases} dY_t = -f(t, Y_t, Z_t) dt + Z_t dB_t, \\ Y_T = \tilde{\xi} \text{ de carré intégrable,} \end{cases}$$

avec $\tilde{\xi}$ va \mathcal{F}_T -mesurable, $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Une solution (Y, Z) à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$, où Y est continu adapté et Z progressivement mesurable, vérifie \mathbb{P} -ps :

$$\begin{cases} \int_0^T |f(s, Y_s, Z_s)| ds + \int_0^T |Z_s|^2 ds < \infty, \\ Y_t = \tilde{\xi} + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s. \end{cases}$$

Théorème fondamental

On cherche à résoudre :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad \forall t \in [0, T].$$

Théorème (Pardoux, Peng 90 ; El Karoui, Peng, Quenez 97)

On suppose que :

- *f est globalement lipschitzienne en (y, z) uniformément en (ω, s) ;*
- $\mathbb{E} \left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s, 0, 0)|^2 ds \right] < \infty.$

Alors l'EDSR admet une unique solution avec Y et Z de carré intégrable en temps et en aléa.

On propose l'approximation :

$$Y_{T-h} = \xi + \int_{T-h}^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_{T-h}^T Z_s dB_s = \mathbb{E} \left[\xi + \int_{T-h}^T f(s, Y_s, Z_s) ds \middle| \mathcal{F}_{T-h} \right] \\ \simeq \mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_{T-h}] + f(T-h, Y_{T-h}, Z_{T-h})h$$

On propose l'approximation :

$$Y_{T-h} = \xi + \int_{T-h}^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_{T-h}^T Z_s dB_s = \mathbb{E} \left[\xi + \int_{T-h}^T f(s, Y_s, Z_s) ds \middle| \mathcal{F}_{T-h} \right] \\ \simeq \mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_{T-h}] + f(T-h, Y_{T-h}, Z_{T-h})h$$

Par Itô : $d(Y_t B_t) = Y_t dB_t + B_t dY_t + Z_t dt$. Et si Z varie peu :

$$Z_{T-h} \simeq \frac{1}{h} \mathbb{E} \left[\int_{T-h}^T Z_s ds \middle| \mathcal{F}_{T-h} \right].$$

On propose l'approximation :

$$Y_{T-h} = \xi + \int_{T-h}^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_{T-h}^T Z_s dB_s = \mathbb{E} \left[\xi + \int_{T-h}^T f(s, Y_s, Z_s) ds \middle| \mathcal{F}_{T-h} \right]$$

$$\simeq \mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_{T-h}] + f(T-h, Y_{T-h}, Z_{T-h})h$$

Par Itô : $d(Y_t B_t) = Y_t dB_t + B_t dY_t + Z_t dt$. Et si Z varie peu :

$$Z_{T-h} \simeq \frac{1}{h} \mathbb{E} \left[\int_{T-h}^T Z_s ds \middle| \mathcal{F}_{T-h} \right].$$

$$\mathbb{E} \left[\int_{T-h}^T Z_s ds \middle| \mathcal{F}_{T-h} \right] = \mathbb{E} \left[Y_T B_T - Y_{T-h} B_{T-h} + \int_{T-h}^T f(s, Y_s, Z_s) B_s ds \middle| \mathcal{F}_{T-h} \right]$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[Y_T (B_T - B_{T-h}) | \mathcal{F}_{T-h}]}_{\text{ordre } \sqrt{h}} + \underbrace{\mathbb{E}[Y_T - Y_{T-h} | \mathcal{F}_{T-h}]}_{\text{ordre } h} B_{T-h}$$

$$+ \underbrace{\mathbb{E} \left[\int_{T-h}^T f(s, Y_s, Z_s) B_s ds \middle| \mathcal{F}_{T-h} \right]}_{\text{ordre } h}$$

On obtient alors Z_{T-h} de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{h}} \dots$

Le théorème de Donsker

Soient ε_k des v.a.i.d $\mathcal{U}(\{-1, 1\})$, $S_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$ et $S_t = (1 - \{t\})S_{[t]} + \{t\}S_{[t]+1}$.

On définit

$$S_t^{(n)} = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}, \quad \text{pour } t \in [0, 1] \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

Théorème (Donsker, 51)

$$S^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} B \quad \text{dans } \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}).$$

Résolution d'une EDSR discrète

Pour résoudre

$$Y_t = \Phi\left((B_t)_{t \in [0, T]}\right) + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s,$$

on considère :

$$y_j^n = y_{j+1}^n + f(jh, y_j^n, z_j^n)h - z_j^n \sqrt{h} \varepsilon_{j+1}^n, \quad (1)$$

avec pas de temps $h = \frac{T}{n}$, $(\varepsilon_j^n)_{1 \leq j \leq n}$ va iid $\mathcal{U}(\{-1, 1\})$. On définit

$$B_t^n = \sqrt{h} \sum_{j=1}^{\lfloor t/h \rfloor} \varepsilon_j^n \text{ et on prend pour condition terminale } y_n^n = \Phi\left((B_t^n)_{t \in [0, T]}\right).$$

Résolution d'une EDSR discrète

Pour résoudre

$$Y_t = \Phi \left((B_t)_{t \in [0, T]} \right) + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s,$$

on considère :

$$y_j^n = y_{j+1}^n + f(jh, y_j^n, z_j^n)h - z_j^n \sqrt{h} \varepsilon_{j+1}^n, \quad (1)$$

avec pas de temps $h = \frac{T}{n}$, $(\varepsilon_j^n)_{1 \leq j \leq n}$ i.i.d $\mathcal{U}(\{-1, 1\})$. On définit

$$B_t^n = \sqrt{h} \sum_{j=1}^{\lfloor t/h \rfloor} \varepsilon_j^n \text{ et on prend pour condition terminale } y_n^n = \Phi \left((B_t^n)_{t \in [0, T]} \right).$$

Lemme

Soit $\mathcal{G}_j^n = \sigma(\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_j^n)$, y_{j+1}^n une va \mathcal{G}_{j+1}^n -mesurable. Si h est suffisamment petit, alors il existe un unique couple (y_j^n, z_j^n) solution de (1) et \mathcal{G}_j^n -mesurable.

Résolution d'une EDSR discrète

$$y_j^n = y_{j+1}^n + f(jh, y_j^n, z_j^n)h - z_j^n \sqrt{h} \varepsilon_{j+1}^n, \quad (1)$$

Lemme

Soit $\mathcal{G}_j^n = \sigma(\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_j^n)$, y_{j+1}^n une va \mathcal{G}_{j+1}^n -mesurable. Si h est suffisamment petit, alors il existe un unique couple (y_j^n, z_j^n) solution de (1) et \mathcal{G}_j^n -mesurable.

Démonstration.

$y_{j+1}^n = G(\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_{j+1}^n)$; on pose $Y_+ = G(\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_j^n, 1)$ et $Y_- = G(\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_j^n, -1)$. On a :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y_j^n = Y_+ + f(jh, y_j^n, z_j^n)h - z_j^n \sqrt{h} \\ y_j^n = Y_- + f(jh, y_j^n, z_j^n)h + z_j^n \sqrt{h} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_j^n = \frac{Y_+ - Y_-}{2\sqrt{h}} \\ y_j^n = \frac{Y_+ + Y_-}{2} + f(jh, y_j^n, z_j^n)h \end{cases}$$

Pour $h < \frac{1}{\|f\|_{\text{lip}}}$, point fixe d'une application contractante. \square

Résolution d'une EDSR discrète – Schéma explicite

Pour résoudre

$$Y_t = \Phi \left((B_t)_{t \in [0, T]} \right) + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s,$$

on considère :

$$\bar{y}_j^n = \bar{y}_{j+1}^n + f(jh, \mathbb{E}[\bar{y}_{j+1}^n | \mathcal{G}_j^n], \bar{z}_j^n) h - \bar{z}_j^n \sqrt{h} \varepsilon_{j+1}^n,$$

avec pas de temps $h = \frac{T}{n}$, $(\varepsilon_j^n)_{1 \leq j \leq n}$ vaillid $\mathcal{U}(\{-1, 1\})$. On définit

$$B_t^n = \sqrt{h} \sum_{j=1}^{\lfloor t/h \rfloor} \varepsilon_j^n \text{ et on prend pour condition terminale } \bar{y}_n^n = \Phi \left((B_t^n)_{t \in [0, T]} \right).$$

Théorème (Peng, Xu 08)

On définit $\bar{Y}_t^n := \bar{y}_{\lfloor t/h \rfloor}^n$ et $\bar{Z}_t^n := \bar{z}_{\lfloor t/h \rfloor}^n$. On suppose que f est Lipschitz par rapport à y, z uniformément en temps et que Φ est Lipschitz. Alors :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{Y}_t^n - Y_t|^2 + \int_0^T |\bar{Z}_s^n - Z_s|^2 ds \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Algorithme de résolution

On résout :

$$\bar{y}_j^n = \bar{y}_{j+1}^n + f(jh, \mathbb{E}[\bar{y}_{j+1}^n | \mathcal{G}_j^n], \bar{z}_j^n)h - \bar{z}_j^n \sqrt{h} \varepsilon_{j+1}^n,$$

et on obtient $\bar{y}_j^n = u_j^n(\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_j^n)$ et $\bar{z}_j^n = v_j^n(\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_j^n)$.

Algorithme de résolution

On résout :

$$\bar{y}_j^n = \bar{y}_{j+1}^n + f(jh, \mathbb{E}[\bar{y}_{j+1}^n | \mathcal{G}_j^n], \bar{z}_j^n) h - \bar{z}_j^n \sqrt{h} \varepsilon_{j+1}^n,$$

et on obtient $\bar{y}_j^n = u_j^n(\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_j^n)$ et $\bar{z}_j^n = v_j^n(\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_j^n)$. On connaît la fonction u_n^n (condition terminale) et on calcule par récurrence, pour tout $\alpha \in \{-1, 1\}^j$:

$$\begin{cases} v_j^n(\alpha) = \frac{u_{j+1}^n(\alpha, 1) - u_{j+1}^n(\alpha, -1)}{2\sqrt{h}} \\ u_j^n(\alpha) = \frac{u_{j+1}^n(\alpha, 1) + u_{j+1}^n(\alpha, -1)}{2} + f\left(jh, \frac{u_{j+1}^n(\alpha, 1) + u_{j+1}^n(\alpha, -1)}{2}, v_j^n(\alpha)\right) h \end{cases}$$

Algorithme de résolution

On résout :

$$\bar{y}_j^n = \bar{y}_{j+1}^n + f(jh, \mathbb{E}[\bar{y}_{j+1}^n | \mathcal{G}_j^n], \bar{z}_j^n) h - \bar{z}_j^n \sqrt{h} \varepsilon_{j+1}^n,$$

et on obtient $\bar{y}_j^n = u_j^n(\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_j^n)$ et $\bar{z}_j^n = v_j^n(\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_j^n)$. On connaît la fonction u_n^n (condition terminale) et on calcule par récurrence, pour tout $\alpha \in \{-1, 1\}^j$:

$$\begin{cases} v_j^n(\alpha) = \frac{u_{j+1}^n(\alpha, 1) - u_{j+1}^n(\alpha, -1)}{2\sqrt{h}} \\ u_j^n(\alpha) = \frac{u_{j+1}^n(\alpha, 1) + u_{j+1}^n(\alpha, -1)}{2} + f\left(jh, \frac{u_{j+1}^n(\alpha, 1) + u_{j+1}^n(\alpha, -1)}{2}, v_j^n(\alpha)\right) h \end{cases}$$

Ainsi, on n'a plus qu'à "tirer une trajectoire", c'est-à-dire une réalisation des variables $(\varepsilon_j^n)_{1 \leq j \leq n}$ et on obtiendra une réalisation de \bar{y}^n et \bar{z}^n , censés approcher des réalisations de Y et Z .

Algorithme de résolution

On résout :

$$\bar{y}_j^n = \bar{y}_{j+1}^n + f(jh, \mathbb{E}[\bar{y}_{j+1}^n | \mathcal{G}_j^n], \bar{z}_j^n) h - \bar{z}_j^n \sqrt{h} \varepsilon_{j+1}^n,$$

et on obtient $\bar{y}_j^n = u_j^n(\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_j^n)$ et $\bar{z}_j^n = v_j^n(\varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_j^n)$. On connaît la fonction u_n^n (condition terminale) et on calcule par récurrence, pour tout $\alpha \in \{-1, 1\}^j$:

$$\begin{cases} v_j^n(\alpha) = \frac{u_{j+1}^n(\alpha, 1) - u_{j+1}^n(\alpha, -1)}{2\sqrt{h}} \\ u_j^n(\alpha) = \frac{u_{j+1}^n(\alpha, 1) + u_{j+1}^n(\alpha, -1)}{2} + f\left(jh, \frac{u_{j+1}^n(\alpha, 1) + u_{j+1}^n(\alpha, -1)}{2}, v_j^n(\alpha)\right) h \end{cases}$$

Ainsi, on n'a plus qu'à "tirer une trajectoire", c'est-à-dire une réalisation des variables $(\varepsilon_j^n)_{1 \leq j \leq n}$ et on obtiendra une réalisation de \bar{y}^n et \bar{z}^n , censés approcher des réalisations de Y et Z .

Problème : le nombre d'évaluations de fonctions est **exponentiel** en n .

Algorithme de résolution

On résout :

$$\bar{y}_j^n = \bar{y}_{j+1}^n + f(jh, \mathbb{E}[\bar{y}_{j+1}^n | \mathcal{G}_j^n], \bar{z}_j^n) h - \bar{z}_j^n \sqrt{h} \varepsilon_{j+1}^n,$$

avec condition terminale $\bar{y}_n^n = u_n^n(\varepsilon_1^n + \dots + \varepsilon_n^n)$. Après calculs, on montre qu'on dispose d'expressions de la forme $\bar{y}_j^n = u_j^n(\varepsilon_1^n + \dots + \varepsilon_j^n)$ et $\bar{z}_j^n = v_j^n(\varepsilon_1^n + \dots + \varepsilon_j^n)$. On connaît la fonction u_n^n (condition terminale) et on calcule par récurrence, pour tout $\alpha \in \{-j + 2k | 0 \leq k \leq j\}$:

$$\begin{cases} v_j^n(\alpha) = \frac{u_{j+1}^n(\alpha+1) - u_{j+1}^n(\alpha-1)}{2\sqrt{h}} \\ u_j^n(\alpha) = \frac{u_{j+1}^n(\alpha+1) + u_{j+1}^n(\alpha-1)}{2} + f\left(jh, \frac{u_{j+1}^n(\alpha+1) + u_{j+1}^n(\alpha-1)}{2}, v_j^n(\alpha)\right) h \end{cases}$$

Algorithme de résolution

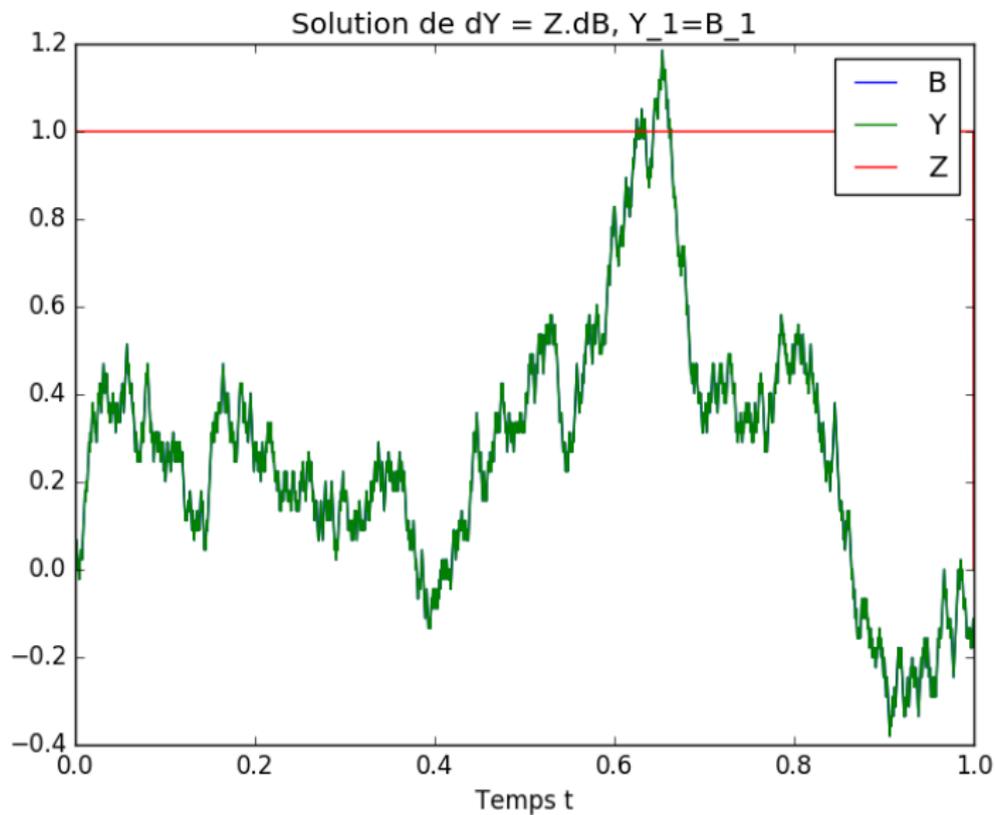
On résout :

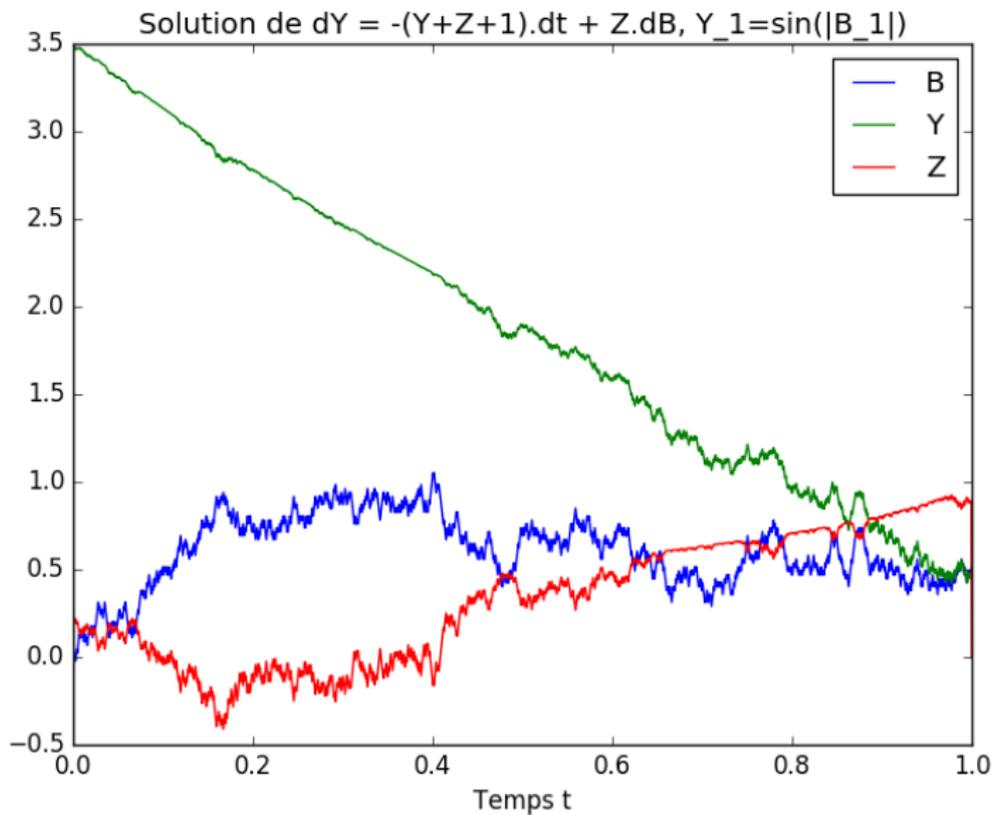
$$\bar{y}_j^n = \bar{y}_{j+1}^n + f(jh, \mathbb{E}[\bar{y}_{j+1}^n | \mathcal{G}_j^n], \bar{z}_j^n) h - \bar{z}_j^n \sqrt{h} \varepsilon_{j+1}^n,$$

avec condition terminale $\bar{y}_n^n = u_n^n(\varepsilon_1^n + \dots + \varepsilon_n^n)$. Après calculs, on montre qu'on dispose d'expressions de la forme $\bar{y}_j^n = u_j^n(\varepsilon_1^n + \dots + \varepsilon_j^n)$ et $\bar{z}_j^n = v_j^n(\varepsilon_1^n + \dots + \varepsilon_j^n)$. On connaît la fonction u_n^n (condition terminale) et on calcule par récurrence, pour tout $\alpha \in \{-j + 2k | 0 \leq k \leq j\}$:

$$\begin{cases} v_j^n(\alpha) = \frac{u_{j+1}^n(\alpha+1) - u_{j+1}^n(\alpha-1)}{2\sqrt{h}} \\ u_j^n(\alpha) = \frac{u_{j+1}^n(\alpha+1) + u_{j+1}^n(\alpha-1)}{2} + f\left(jh, \frac{u_{j+1}^n(\alpha+1) + u_{j+1}^n(\alpha-1)}{2}, v_j^n(\alpha)\right) h \end{cases}$$

Intérêt : la fonction u_j ne peut prendre que $j + 1$ valeurs, et le nombre d'évaluations de fonctions est désormais **quadratique** en n .





Approximation de solutions de viscosité de certaines EDP

Quand on résout :

$$Y_t^{T,x} = \Phi(x + B_T) + \int_t^T f(s, Y_s^{T,x}, Z_s^{T,x}) ds - \int_t^T Z_s^{T,x} dB_s,$$

on obtient l'expression de la fonction $u : (T, x) \mapsto Y_0^{T,x}$. On peut montrer que cette fonction est solution, (au moins en un sens faible), de l'EDP :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u(t, x) + f(t, u(t, x), \partial_x u(t, x)) \\ u(0, x) = \Phi(x) \end{cases}$$

Pour aller plus loin...

- Briand, Delyon, Mémin. 2001. Donsker-type theorem for BSDEs.
- Peng, Xu. 2008. Numerical algorithms for 1-d BSDEs : convergence and simulations.

Pour aller plus loin...

- Briand, Delyon, Mémin. 2001. Donsker-type theorem for BSDEs.
- Peng, Xu. 2008. Numerical algorithms for 1-d BSDEs : convergence and simulations.

Merci pour votre attention !