Étude du comportement en temps long d'EDP par des EDS rétrogrades ergodiques

Florian Lemonnier
sous la direction de Ying Hu

Journées de probabilités, Tours

25 juin 2018

Motivation

On s'intéresse à l'EDP de Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$\begin{cases} f(x, \partial_x u_T(t,x)\sigma(x)) + \partial_t u_T(t,x) + \mathcal{L}u_T(t,x) = 0, \\ u_T(T,x) = g(x). \end{cases}$$

Quel est son comportement en temps long (quand $T \to \infty$) ?

Motivation

On s'intéresse à l'EDP de Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$\begin{cases} f(x, \partial_x u_T(t,x)\sigma(x)) + \partial_t u_T(t,x) + \mathcal{L}u_T(t,x) = 0, \\ u_T(T,x) = g(x). \end{cases}$$

Quel est son comportement en temps long (quand $T \to \infty$) ?
En posant $\widetilde{u}(t,x) = u_T(T-t,x)$, elle se réécrit :

$$\begin{cases} f(x, \partial_x \widetilde{u}(t,x)\sigma(x)) - \partial_t \widetilde{u}(t,x) + \mathcal{L}\widetilde{u}(t,x) = 0, \\ \widetilde{u}(0,x) = g(x). \end{cases}$$

On s'intéresse à l'EDP de Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$\begin{cases} f(x, \partial_x u_T(t,x)\sigma(x)) + \partial_t u_T(t,x) + \mathcal{L}u_T(t,x) = 0, \\ u_T(T,x) = g(x). \end{cases}$$

Quel est son comportement en temps long (quand $T \to \infty$) ?
En posant $\widetilde{u}(t,x) = u_T(T-t,x)$, elle se réécrit :

$$\begin{cases} f(x, \partial_x \widetilde{u}(t,x)\sigma(x)) - \partial_t \widetilde{u}(t,x) + \mathcal{L}\widetilde{u}(t,x) = 0, \\ \widetilde{u}(0,x) = g(x). \end{cases}$$

Sous certaines hypothèses, on sait déjà que :

$$\exists L > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall T > 0,\ u_T(0,x) - \lambda T - v(x) \underset{T \to \infty}{\longrightarrow} L,$$

avec (v, λ) solution de

$$f(x, \nabla v(x)\sigma(x)) + \mathcal{L}v(x) = \lambda.$$

On s'intéresse à l'EDP de Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$\begin{cases} f(x, \partial_x u_T(t,x)\sigma(x)) + \partial_t u_T(t,x) + \mathcal{L}u_T(t,x) = 0, \\ u_T(T,x) = g(x). \end{cases}$$

Quel est son comportement en temps long (quand $T \to \infty$) ?
En posant $\widetilde{u}(t,x) = u_T(T-t,x)$, elle se réécrit :

$$\begin{cases} f(x, \partial_x \widetilde{u}(t,x)\sigma(x)) - \partial_t \widetilde{u}(t,x) + \mathcal{L}\widetilde{u}(t,x) = 0, \\ \widetilde{u}(0,x) = g(x). \end{cases}$$

Sous certaines hypothèses, on sait déjà que :

$$\exists L > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall T > 0,\ u_T(0,x) - \lambda T - v(x) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} L,$$

avec (v, λ) solution de

$$f(x, \nabla v(x)\sigma(x)) + \mathcal{L}v(x) = \lambda.$$

Peut-on préciser la vitesse de convergence ?

C'est quoi, une EDSR ?

Une EDS, c'est ça :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\,\mathrm{d}W_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Une EDS, c'est ça :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\,\mathrm{d}W_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

On dit que le processus X est une solution de l'EDS sur l'intervalle $[0, T]$ quand X est continu, adapté à W et :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T],\, X_t = x + \displaystyle\int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,\mathrm{d}W_s \qquad \text{ps} \\ \displaystyle\int_0^T |b(s, X_s)|\,\mathrm{d}s + \int_0^T |\sigma(s, X_s)|^2\,\mathrm{d}s < \infty \qquad \text{ps} \end{cases}$$

Une EDS, c'est ça :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\,\mathrm{d}W_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

On dit que le processus X est une solution de l'EDS sur l'intervalle $[0, T]$ quand X est continu, adapté à W et :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T],\, X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,\mathrm{d}W_s \quad \text{ps} \\ \int_0^T |b(s, X_s)|\,\mathrm{d}s + \int_0^T |\sigma(s, X_s)|^2\,\mathrm{d}s < \infty \quad \text{ps} \end{cases}$$

Théorème

Existence et unicité de la solution dans $L^p(\Omega, \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^d))$ pour tous $p \geq 2$ et $T > 0$ dès que b et σ sont uniformément globalement Lipschitziennes en espace.

C'est quoi, une EDSR ?

Pour une EDSR, on aurait envie de poser :

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = f(t, Y_t)\,\mathrm{d}t + g(t, Y_t)\,\mathrm{d}W_t \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

avec ξ une variable $\mathcal{F}_T$-mesurable.

C'est quoi, une EDSR ?

Exemple fondamental : résolvons

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = 0 \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

C'est quoi, une EDSR ?

Exemple fondamental : résolvons

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = 0 \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

On a $Y_t = \xi$ pour tout $t \in [0, T]$.

C'est quoi, une EDSR ?

Exemple fondamental : résolvons

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = 0 \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

On a $Y_t = \xi$ pour tout $t \in [0, T]$. Ce n'est pas adapté ! On pose $Y'_t = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_t]$. Y' est adapté, mais quelle EDSR vérifie-t-il ?

C'est quoi, une EDSR ?

Exemple fondamental : résolvons

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = 0 \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

On a $Y_t = \xi$ pour tout $t \in [0, T]$. Ce n'est pas adapté ! On pose $Y'_t = \mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_t]$. Y' est adapté, mais quelle EDSR vérifie-t-il ?

Théorème (Représentation des martingales browniennes)

*Soit M une $(\mathcal{F}_t)$-martingale issue de 0 telle que $\forall t \geq 0$, $\mathbb{E}\left[M_t^2\right] < \infty$.
Alors il existe un unique processus Z progressivement mesurable et tel que pour tout $t \geq 0$:*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |Z_s|^2 \, ds\right] < \infty \text{ et } M_t = \int_0^t Z_s \, dW_s.$$

Exemple fondamental : résolvons

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = 0 \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

On a $Y_t = \xi$ pour tout $t \in [0, T]$. Ce n'est pas adapté ! On pose $Y'_t = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_t]$. Y' est adapté, mais quelle EDSR vérifie-t-il ?

Théorème (Représentation des martingales browniennes)

Soit M une $(\mathcal{F}_t)$-martingale issue de 0 telle que $\forall t \geq 0$, $\mathbb{E}\left[M_t^2\right] < \infty$.
Alors il existe un unique processus Z progressivement mesurable et tel que pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |Z_s|^2 \, ds\right] < \infty \text{ et } M_t = \int_0^t Z_s \, dW_s.$$

Quand $\mathbb{E}[|\xi|^2] < \infty$, on a donc $\mathrm{d}Y'_t = Z_t \, \mathrm{d}W_t$, pour un certain processus Z...

Une EDSR, c'est ça :

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = -f(t, Y_t, Z_t)\,\mathrm{d}t + Z_t\,\mathrm{d}W_t \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

avec ξ une variable $\mathcal{F}_T$-mesurable de carré intégrable.
On dit que le couple de processus (Y, Z) est solution de l'EDSR sur l'intervalle $[0, T]$ quand Y est continu adapté et Z progressivement mesurable et que :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T], Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s \text{ ps} \\ \int_0^T |f(s, Y_s, Z_s)|\,\mathrm{d}s + \int_0^T |Z_s|^2\,\mathrm{d}s < \infty \text{ ps} \end{cases}$$

C'est quoi, une EDSR ?

Une EDSR, c'est ça :

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = -f(t, Y_t, Z_t)\,\mathrm{d}t + Z_t\,\mathrm{d}W_t \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

avec ξ une variable $\mathcal{F}_T$-mesurable de carré intégrable.
On dit que le couple de processus (Y, Z) est solution de l'EDSR sur l'intervalle $[0, T]$ quand Y est continu adapté et Z progressivement mesurable et que :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T], Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s \text{ ps} \\ \int_0^T |f(s, Y_s, Z_s)|\,\mathrm{d}s + \int_0^T |Z_s|^2\,\mathrm{d}s < \infty \text{ ps} \end{cases}$$

Théorème (Pardoux, Peng 90 ; El Karoui, Peng, Quénez 97)

On suppose que :

- *f est globalement lipschitzienne en (y, z) uniformément en aléa et temps ;*
- $\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s, 0, 0)|^2\, ds\right] < \infty.$

Alors l'EDSR admet une unique solution telle que Z soit de carré intégrable.

Lien avec les EDP Hamilton-Jacobi-Bellman

On résout :

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}W_r \\ Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})\,\mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{t,x}\,\mathrm{d}W_r \end{cases}$$

Lien avec les EDP Hamilton-Jacobi-Bellman

On résout :

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}W_r \\ Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})\,\mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{t,x}\,\mathrm{d}W_r \end{cases}$$

Quand b, σ, f et g sont déterministes, on définit une fonction déterministe par $u(t,x) := Y_t^{t,x}$

Lien avec les EDP Hamilton-Jacobi-Bellman

On résout :

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x}) \, \mathrm{d}r + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x}) \, \mathrm{d}W_r \\ Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}) \, \mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{t,x} \, \mathrm{d}W_r \end{cases}$$

Quand b, σ, f et g sont déterministes, on définit une fonction déterministe par $u(t,x) := Y_t^{t,x}$; et par unicité $Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x})$:

Lien avec les EDP Hamilton-Jacobi-Bellman

On résout :

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}W_r \\ Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})\,\mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{t,x}\,\mathrm{d}W_r \end{cases}$$

Quand b, σ, f et g sont déterministes, on définit une fonction déterministe par $u(t,x) := Y_t^{t,x}$; et par unicité $Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x})$:

$$Y_\bullet^{s,X_s^{t,x}} = g(X_T^{s,X_s^{t,x}}) + \int_\bullet^T f(r, X_r^{s,X_s^{t,x}}, Y_r^{s,X_s^{t,x}}, Z_r^{s,X_s^{t,x}})\,\mathrm{d}r - \int_\bullet^T Z_r^{s,X_s^{t,x}}\,\mathrm{d}W_r$$

On résout :

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}W_r \\ Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})\,\mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{t,x}\,\mathrm{d}W_r \end{cases}$$

Quand b, σ, f et g sont déterministes, on définit une fonction déterministe par $u(t,x) := Y_t^{t,x}$; et par unicité $Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x})$:

$$\begin{aligned} Y_\bullet^{s,X_s^{t,x}} &= g(X_T^{s,X_s^{t,x}}) + \int_\bullet^T f(r, X_r^{s,X_s^{t,x}}, Y_r^{s,X_s^{t,x}}, Z_r^{s,X_s^{t,x}})\,\mathrm{d}r - \int_\bullet^T Z_r^{s,X_s^{t,x}}\,\mathrm{d}W_r \\ &= g(X_T^{t,x}) + \int_\bullet^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{s,X_s^{t,x}}, Z_r^{s,X_s^{t,x}})\,\mathrm{d}r - \int_\bullet^T Z_r^{s,X_s^{t,x}}\,\mathrm{d}W_r \end{aligned}$$

On résout :

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}W_r \\ Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})\,\mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{t,x}\,\mathrm{d}W_r \end{cases}$$

Quand b, σ, f et g sont déterministes, on définit une fonction déterministe par $u(t,x) := Y_t^{t,x}$; et par unicité $Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x})$:

$$Y_\bullet^{s,X_s^{t,x}} = g(X_T^{t,x}) + \int_\bullet^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{s,X_s^{t,x}}, Z_r^{s,X_s^{t,x}})\,\mathrm{d}r - \int_\bullet^T Z_r^{s,X_s^{t,x}}\,\mathrm{d}W_r$$

$$Y_\bullet^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_\bullet^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})\,\mathrm{d}r - \int_\bullet^T Z_r^{t,x}\,\mathrm{d}W_r$$

On résout :

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}W_r \\ Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})\,\mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{t,x}\,\mathrm{d}W_r \end{cases}$$

Quand b, σ, f et g sont déterministes, on définit une fonction déterministe par $u(t,x) := Y_t^{t,x}$; et par unicité $Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x})$.
Et si b, σ, f et g sont suffisamment régulières, alors u est $\mathcal{C}^{1,2}$ et, par la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u(s, X_s^{t,x}) &= \partial_t u(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}s + \partial_x u(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}X_s^{t,x} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\{\partial^2_{xx} u.\sigma\sigma^*\}(s, X_s^{t,x}))\mathrm{d}s \\ &= \{\partial_t u + \partial_x u.b + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\partial^2_{xx} u.\sigma\sigma^*)\}(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}s + \{\partial_x u.\sigma\}(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}W_s \\ \mathrm{d}Y_s^{t,x} &= -f(s, X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})\,\mathrm{d}s + Z_s^{t,x}\,\mathrm{d}W_s \end{aligned}$$

Lien avec les EDP Hamilton-Jacobi-Bellman

On résout :

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}W_r \\ Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})\,\mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{t,x}\,\mathrm{d}W_r \end{cases}$$

Quand b, σ, f et g sont déterministes, on définit une fonction déterministe par $u(t,x) := Y_t^{t,x}$; et par unicité $Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x})$.
Et si b, σ, f et g sont suffisamment régulières, alors u est $\mathcal{C}^{1,2}$ et, par la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u(s, X_s^{t,x}) &= \partial_t u(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}s + \partial_x u(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}X_s^{t,x} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\{\partial_{xx}^2 u.\sigma\sigma^*\}(s, X_s^{t,x}))\mathrm{d}s \\ &= \{\partial_t u + \partial_x u.b + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\partial_{xx}^2 u.\sigma\sigma^*)\}(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}s + \{\partial_x u.\sigma\}(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}W_s \\ \mathrm{d}Y_s^{t,x} &= -f(s, X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})\,\mathrm{d}s + Z_s^{t,x}\,\mathrm{d}W_s \end{aligned}$$

Donc $Z_s^{t,x} = \partial_x u(s, X_s^{t,x})\sigma(s, X_s^{t,x})$

On résout :

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}W_r \\ Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})\,\mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{t,x}\,\mathrm{d}W_r \end{cases}$$

Quand b, σ, f et g sont déterministes, on définit une fonction déterministe par $u(t,x) := Y_t^{t,x}$; et par unicité $Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x})$.
Et si b, σ, f et g sont suffisamment régulières, alors u est $\mathcal{C}^{1,2}$ et, par la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u(s, X_s^{t,x}) &= \partial_t u(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}s + \partial_x u(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}X_s^{t,x} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\{\partial_{xx}^2 u.\sigma\sigma^*\}(s, X_s^{t,x}))\mathrm{d}s \\ &= \{\partial_t u + \partial_x u.b + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\partial_{xx}^2 u.\sigma\sigma^*)\}(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}s + \{\partial_x u.\sigma\}(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}W_s \\ \mathrm{d}Y_s^{t,x} &= -f(s, X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})\,\mathrm{d}s + Z_s^{t,x}\,\mathrm{d}W_s \end{aligned}$$

Donc $Z_s^{t,x} = \partial_x u(s, X_s^{t,x})\sigma(s, X_s^{t,x})$ et

$$\begin{cases} f(t, x, u(t,x), \partial_x u(t,x)\sigma(t,x)) + \{\partial_t u + \partial_x u.b + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\partial_{xx}^2 u.\sigma\sigma^*)\}(t,x) = 0 \\ u(T, x) = g(x) \end{cases}$$

On résout :

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})\, \mathrm{d}r + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})\, \mathrm{d}W_r \\ Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})\, \mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{t,x}\, \mathrm{d}W_r \end{cases}$$

Quand b, σ, f et g sont déterministes, on définit une fonction déterministe par $u(t,x) := Y_t^{t,x}$; et par unicité $Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x})$.
Et si b, σ, f et g sont suffisamment régulières, alors u est $\mathcal{C}^{1,2}$ et alors $Z_s^{t,x} = \partial_x u(s, X_s^{t,x})\sigma(s, X_s^{t,x})$ et

$$\begin{cases} f(t,x,u(t,x), \partial_x u(t,x)\sigma(t,x)) + \{\partial_t u + \partial_x u.b + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\partial_{xx}^2 u.\sigma\sigma^*)\}(t,x) = 0 \\ u(T,x) = g(x) \end{cases}$$

Si b, σ, f et g sont seulement Lipschitz, alors u est seulement continue et est solution de viscosité de l'équation ci-dessus.

On considère

$$\begin{cases} f(t,x,u(t,x),\partial_x u(t,x)\sigma(t,x)) + \{\partial_t u + \partial_x u.b + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\partial^2_{xx} u.\sigma\sigma^*)\}(t,x) = 0 \\ u(T,x) = g(x) \end{cases}$$

Solution de viscosité d'EDP parabolique

On considère

$$\begin{cases} f(t,x,u(t,x),\partial_x u(t,x)\sigma(t,x)) + \{\partial_t u + \partial_x u.b + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\partial^2_{xx} u.\sigma\sigma^*)\}(t,x) = 0 \\ u(T,x) = g(x) \end{cases}$$

Théorème (Principe du maximum)

$u \in \mathcal{C}^{1,2}$ est solution classique si et seulement si :

- $u(T,\bullet) = g$;
- $\forall \phi \in \mathcal{C}^2$, $\forall (t_0,x_0)$ *max local de* $u-\phi$,

$$f(t_0,x_0,u(t_0,x_0),\partial_x\phi(t_0,x_0)\sigma(t_0,x_0)) + \{\partial_t\phi + \partial_x\phi.b + \frac{1}{2}tr(\partial^2_{xx}\phi.\sigma\sigma^*)\}(t_0,x_0) \leq 0;$$

- $\forall \phi \in \mathcal{C}^2$, $\forall (t_0,x_0)$ *min local de* $u-\phi$,

$$f(t_0,x_0,u(t_0,x_0),\partial_x\phi(t_0,x_0)\sigma(t_0,x_0)) + \{\partial_t\phi + \partial_x\phi.b + \frac{1}{2}tr(\partial^2_{xx}\phi.\sigma\sigma^*)\}(t_0,x_0) \geq 0.$$

Solution de viscosité d'EDP parabolique

On considère

$$\begin{cases} f(t,x,u(t,x),\partial_x u(t,x)\sigma(t,x)) + \{\partial_t u + \partial_x u.b + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\partial^2_{xx}u.\sigma\sigma^*)\}(t,x) = 0 \\ u(T,x) = g(x) \end{cases}$$

Définition (Solution de viscosité)

$u \in \mathcal{C}^0$ est solution de viscosité si et seulement si :

- $u(T,\bullet) = g$;
- $\forall \phi \in \mathcal{C}^2$, $\forall (t_0,x_0)$ *max local de* $u - \phi$,

$$f(t_0,x_0,u(t_0,x_0),\partial_x\phi(t_0,x_0)\sigma(t_0,x_0)) + \{\partial_t\phi + \partial_x\phi.b + \frac{1}{2}tr(\partial^2_{xx}\phi.\sigma\sigma^*)\}(t_0,x_0) \le 0;$$

- $\forall \phi \in \mathcal{C}^2$, $\forall (t_0,x_0)$ *min local de* $u - \phi$,

$$f(t_0,x_0,u(t_0,x_0),\partial_x\phi(t_0,x_0)\sigma(t_0,x_0)) + \{\partial_t\phi + \partial_x\phi.b + \frac{1}{2}tr(\partial^2_{xx}\phi.\sigma\sigma^*)\}(t_0,x_0) \ge 0.$$

EDSR d'horizon infini

On considère l'EDSR d'horizon fini S :

$$Y_t = \xi + \int_t^S f\left(s, Y_s, Z_s\right)\,\mathrm{d}s - \int_t^S Z_s\,\mathrm{d}W_s, \quad \forall t \in [0, S].$$

On considère l'EDSR d'horizon fini S :

$$Y_t = \xi + \int_t^S f(s, Y_s, Z_s)\, \mathrm{d}s - \int_t^S Z_s \, \mathrm{d}W_s, \quad \forall t \in [0, S].$$

Ou, par soustraction :

$$Y_t = Y_T + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \, \mathrm{d}W_s, \quad \forall 0 \leq t \leq T \leq S.$$

EDSR d'horizon infini

On considère l'EDSR d'horizon fini S :

$$Y_t = \xi + \int_t^S f(s, Y_s, Z_s)\, \mathrm{d}s - \int_t^S Z_s \,\mathrm{d}W_s, \quad \forall t \in [0, S].$$

Ou, par soustraction :

$$Y_t = Y_T + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \,\mathrm{d}W_s, \quad \forall 0 \leq t \leq T \leq S.$$

On veut faire tendre S vers l'infini.

On considère l'EDSR d'horizon fini S :

$$Y_t = \xi + \int_t^S f(s, Y_s, Z_s)\, \mathrm{d}s - \int_t^S Z_s\, \mathrm{d}W_s, \quad \forall t \in [0, S].$$

Ou, par soustraction :

$$Y_t = Y_T + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\, \mathrm{d}W_s, \quad \forall 0 \leq t \leq T \leq S.$$

On veut faire tendre S vers l'infini.

Théorème (Briand, Hu 98)

On suppose que :

- $\xi = 0$;
- f *est globalement lipschitzienne en* (y, z), *uniformément en* (ω, s) ;
- f *est monotone en* y : $(y - y')(f(s, y, z) - f(s, y', z)) \leq -a|y - y'|^2$;
- $f(\cdot, 0, 0)$ *est bornée.*

Alors l'EDSR

$$Y_t = Y_T + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s, \quad \forall 0 \leq t \leq T < +\infty,$$

admet une unique solution avec Y *continu borné et* Z *de carré intégrable en temps (localement) et en aléa.*

C'est quoi une EDSR ergodique ?

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^x) - \lambda\} \, \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^x \, \mathrm{d}W_s, \quad \forall 0 \leq t \leq T < +\infty.$$

C'est quoi une EDSR ergodique ?

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^x) - \lambda\} \, \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^x \, \mathrm{d}W_s, \quad \forall 0 \leq t \leq T < +\infty.$$

Inconnues :

- Y^x continu adapté à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- Z^x progressivement mesurable à valeurs dans $\left(\mathbb{R}^d\right)^*$;
- λ un réel.

C'est quoi une EDSR ergodique ?

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \left\{\psi\left(X_s^x, Z_s^x\right) - \lambda\right\} \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^x \, \mathrm{d}W_s, \quad \forall 0 \leq t \leq T < +\infty.$$

Inconnues :

- Y^x continu adapté à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- Z^x progressivement mesurable à valeurs dans $\left(\mathbb{R}^d\right)^*$;
- λ un réel.

Données :

- X^x solution à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de l'EDS

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^x = \Xi\left(X_t^x\right) \mathrm{d}t + \sigma\left(X_t^x\right) \mathrm{d}W_t, \\ X_0 = x; \end{cases}$$

- $\psi : \mathbb{R}^d \times \left(\mathbb{R}^d\right)^* \to \mathbb{R}$ mesurable.

C'est quoi une EDSR ergodique ?

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^x) - \lambda\} \, \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^x \, \mathrm{d}W_s, \quad \forall 0 \leq t \leq T < +\infty.$$

Inconnues :

- Y^x continu adapté à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- Z^x progressivement mesurable à valeurs dans $\left(\mathbb{R}^d\right)^*$;
- λ un réel.

Hypothèses :

- Ξ et σ Lipschitz ;

Données :

- X^x solution à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de l'EDS

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^x = \Xi(X_t^x) \, \mathrm{d}t + \sigma(X_t^x) \, \mathrm{d}W_t, \\ X_0 = x; \end{cases}$$

- $\psi : \mathbb{R}^d \times \left(\mathbb{R}^d\right)^* \to \mathbb{R}$ mesurable.

C'est quoi une EDSR ergodique ?

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^x) - \lambda\} \, \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^x \, \mathrm{d}W_s, \quad \forall 0 \le t \le T < +\infty.$$

Inconnues :

- Y^x continu adapté à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- Z^x progressivement mesurable à valeurs dans $\left(\mathbb{R}^d\right)^*$;
- λ un réel.

Données :

- X^x solution à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de l'EDS

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^x = \Xi(X_t^x) \, \mathrm{d}t + \sigma(X_t^x) \, \mathrm{d}W_t, \\ X_0 = x; \end{cases}$$

- $\psi : \mathbb{R}^d \times \left(\mathbb{R}^d\right)^* \to \mathbb{R}$ mesurable.

Hypothèses :

- Ξ et σ Lipschitz ;
- $\sigma\left(\mathbb{R}^d\right) \subset \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ et $x \mapsto \sigma(x)^{-1}$ est bornée ;

C'est quoi une EDSR ergodique ?

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^x) - \lambda\}\, \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^x \,\mathrm{d}W_s, \quad \forall 0 \le t \le T < +\infty.$$

Inconnues :

- Y^x continu adapté à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- Z^x progressivement mesurable à valeurs dans $(\mathbb{R}^d)^*$;
- λ un réel.

Données :

- X^x solution à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de l'EDS
$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^x = \Xi(X_t^x)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t^x)\,\mathrm{d}W_t, \\ X_0 = x; \end{cases}$$
- $\psi : \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d)^* \to \mathbb{R}$ mesurable.

Hypothèses :

- Ξ et σ Lipschitz ;
- $\sigma(\mathbb{R}^d) \subset \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ et $x \mapsto \sigma(x)^{-1}$ est bornée ;
- $|\psi(x,z) - \psi(x',z')| \le \psi_x|x-x'| + \psi_z\left|z\sigma(x)^{-1} - z'\sigma(x')^{-1}\right|$ et $|\psi(x,0)| \le C(1+|x|)$;

C'est quoi une EDSR ergodique ?

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^x) - \lambda\}\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^x\,\mathrm{d}W_s, \quad \forall 0 \le t \le T < +\infty.$$

Inconnues :

- Y^x continu adapté à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- Z^x progressivement mesurable à valeurs dans $\left(\mathbb{R}^d\right)^*$;
- λ un réel.

Données :

- X^x solution à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de l'EDS
$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^x = \Xi(X_t^x)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t^x)\,\mathrm{d}W_t, \\ X_0 = x; \end{cases}$$
- $\psi : \mathbb{R}^d \times \left(\mathbb{R}^d\right)^* \to \mathbb{R}$ mesurable.

Hypothèses :

- Ξ et σ Lipschitz ;
- $\sigma\left(\mathbb{R}^d\right) \subset \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ et $x \mapsto \sigma(x)^{-1}$ est bornée ;
- $|\psi(x,z) - \psi(x',z')| \le \psi_x|x - x'| + \psi_z\left|z\sigma(x)^{-1} - z'\sigma(x')^{-1}\right|$ et $|\psi(x,0)| \le C(1+|x|)$;
- $\langle \Xi(x), x\rangle \le \Xi_1 - \Xi_2|x|^2$, $|\sigma(x)|_F^2 \le \sigma_1 + \sigma_2|x|^2$ et $\sqrt{\sigma_2}\psi_z\left\|\sigma^{-1}\right\|_\infty + \frac{\sigma_2}{2} < \Xi_2$.

Pourquoi supposer $\sqrt{\sigma_2}\psi_z \left\|\sigma^{-1}\right\|_\infty + \frac{\sigma_2}{2} < \Xi_2$?

Lemme

Soit $\gamma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction bornée.
Par le théorème de Girsanov, pour tout $T > 0$, $\widetilde{W}_t^x = W_t - \int_0^t \gamma(s, X_s^x)\, ds$ est un mouvement brownien sur $[0, T]$ sous une probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}^{x,T}$.
Quand $\sqrt{\sigma_2}\|\gamma\|_\infty + \frac{\sigma_2}{2} < \Xi_2$, on a :

$$\sup_{T>0} \widetilde{\mathbb{E}}^{x,T}\left[|X_T^x|^2\right] \leq C\left(1 + |x|^2\right),$$

avec C qui ne dépend de γ que via $\|\gamma\|_\infty$.

Une EDSR auxiliaire

$$Y_t^{\alpha,x} = Y_T^{\alpha,x} + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^{\alpha,x}) - \alpha Y_s^{\alpha,x}\} \, \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{\alpha,x} \, \mathrm{d}W_s, \quad \forall 0 \leq t \leq T < +\infty.$$

Proposition

1. *Pour tout* $\alpha > 0$, *unique solution* $(Y^{\alpha,x}, Z^{\alpha,x})$.

Une EDSR auxiliaire

$$Y_t^{\alpha,x} = Y_T^{\alpha,x} + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^{\alpha,x}) - \alpha Y_s^{\alpha,x}\}\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{\alpha,x}\,\mathrm{d}W_s, \quad \forall 0 \leq t \leq T < +\infty.$$

Proposition

1. *Pour tout $\alpha > 0$, unique solution $(Y^{\alpha,x}, Z^{\alpha,x})$.*
2. $\left|Y_t^{\alpha,x}\right| \leq \frac{K}{\alpha}(1 + |X_t^x|)$ *et* $Y_t^{\alpha,x} = v^\alpha(X_t^x)$ *$\mathbb{P}$-p.s. où* $v^\alpha : x \mapsto Y_0^{\alpha,x}$.

Une EDSR auxiliaire

$$Y_t^{\alpha,x} = Y_T^{\alpha,x} + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^{\alpha,x}) - \alpha Y_s^{\alpha,x}\}\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{\alpha,x}\,\mathrm{d}W_s, \quad \forall 0 \le t \le T < +\infty.$$

Proposition

1. *Pour tout $\alpha > 0$, unique solution $(Y^{\alpha,x}, Z^{\alpha,x})$.*
2. $\left|Y_t^{\alpha,x}\right| \le \frac{K}{\alpha}(1 + |X_t^x|)$ *et* $Y_t^{\alpha,x} = v^\alpha(X_t^x)$ $\mathbb{P}$*-p.s. où* $v^\alpha : x \mapsto Y_0^{\alpha,x}$.
3. *(Hu, Tessitore 07) Si σ et $\psi(\cdot,0)$ sont bornées, et Ξ et σ de classe $\mathcal{C}^1$, alors v^α est $\mathcal{C}^1$ et $Z_t^{\alpha,x} = \nabla v^\alpha(X_t^x)\,\sigma(X_t^x)$ $\mathbb{P}$-p.s. pour p.t. $t \in \mathbb{R}_+$.*

Une EDSR auxiliaire

$$Y_t^{\alpha,x} = Y_T^{\alpha,x} + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^{\alpha,x}) - \alpha Y_s^{\alpha,x}\}\, \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{\alpha,x}\, \mathrm{d}W_s, \quad \forall 0 \leq t \leq T < +\infty.$$

Proposition

1. *Pour tout $\alpha > 0$, unique solution $(Y^{\alpha,x}, Z^{\alpha,x})$.*
2. $\left|Y_t^{\alpha,x}\right| \leq \frac{K}{\alpha}(1 + |X_t^x|)$ *et* $Y_t^{\alpha,x} = v^\alpha(X_t^x)$ $\mathbb{P}$*-p.s. où* $v^\alpha : x \mapsto Y_0^{\alpha,x}$.
3. *(Hu, Tessitore 07) Si σ et $\psi(\cdot, 0)$ sont bornées, et Ξ et σ de classe $\mathcal{C}^1$, alors v^α est $\mathcal{C}^1$ et $Z_t^{\alpha,x} = \nabla v^\alpha(X_t^x)\sigma(X_t^x)$ $\mathbb{P}$-p.s. pour p.t. $t \in \mathbb{R}_+$.*

Objectif : faire tendre α vers 0. On a besoin d'en savoir plus sur $Y^{\alpha,x}$.

Objectif : faire tendre α vers 0 pour construire une solution à l'EDSRE

Proposition

$$\exists C > 0, \forall \alpha > 0, \forall x, x' \in \mathbb{R}^d, \left|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')\right| \leq C \left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right).$$

Démonstration :

Objectif : faire tendre α vers 0 pour construire une solution à l'EDSRE

Proposition

$$\exists C > 0, \forall \alpha > 0, \forall x, x' \in \mathbb{R}^d, \left| v^\alpha(x) - v^\alpha(x') \right| \leq C \left(1 + |x|^2 + |x'|^2 \right).$$

Démonstration : *Cas où σ et $\psi(.,0)$ bornées, Ξ et σ $\mathcal{C}^1$.*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Y_t^{\alpha,x} &= -\left\{ \psi\left(X_t^x, Z_t^{\alpha,x}\right) - \alpha Y_t^{\alpha,x} \right\} \mathrm{d}t + Z_t^{\alpha,x} \mathrm{d}W_t \\ &= -\left\{ \psi\left(X_t^x, 0\right) - \alpha Y_t^{\alpha,x} \right\} \mathrm{d}t + Z_t^{\alpha,x} \left(\mathrm{d}W_t - \Gamma^\alpha\left(X_t^x\right) \mathrm{d}t \right) \end{aligned}$$

où $\Gamma^\alpha(x) = \frac{\psi(x, \nabla v^\alpha(x)\sigma(x)) - \psi(x,0)}{|\nabla v^\alpha(x)\sigma(x)|^2} \nabla v^\alpha(x)\sigma(x) \mathbb{1}_{\nabla v^\alpha(x)\sigma(x) \neq 0}$.

Proposition

$$\exists C > 0, \forall \alpha > 0, \forall x, x' \in \mathbb{R}^d, \left|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')\right| \leq C\left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right).$$

Démonstration : *Cas où σ et $\psi(.,0)$ bornées, Ξ et σ $\mathcal{C}^1$.*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Y_t^{\alpha,x} &= -\left\{\psi\left(X_t^x, Z_t^{\alpha,x}\right) - \alpha Y_t^{\alpha,x}\right\}\mathrm{d}t + Z_t^{\alpha,x}\,\mathrm{d}W_t \\ &= -\left\{\psi\left(X_t^x, 0\right) - \alpha Y_t^{\alpha,x}\right\}\mathrm{d}t + Z_t^{\alpha,x}\left(\mathrm{d}W_t - \Gamma^\alpha\left(X_t^x\right)\mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$

où $\Gamma^\alpha(x) = \frac{\psi(x,\nabla v^\alpha(x)\sigma(x)) - \psi(x,0)}{|\nabla v^\alpha(x)\sigma(x)|^2}\nabla v^\alpha(x)\sigma(x)\mathbb{1}_{\nabla v^\alpha(x)\sigma(x)\neq 0}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Y_t^{\alpha,x} &= -\left\{\psi\left(X_t^x, 0\right) - \alpha Y_t^{\alpha,x}\right\}\mathrm{d}t + Z_t^{\alpha,x}\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t^{\alpha,x} \\ \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\alpha t}Y_t^{\alpha,x}\right) &= -\mathrm{e}^{-\alpha t}\psi\left(X_t^x, 0\right)\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\alpha t}Z_t^{\alpha,x}\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t^{\alpha,x} \end{aligned}$$

Objectif : faire tendre α vers 0 pour construire une solution à l'EDSRE

Proposition

$$\exists C > 0, \forall \alpha > 0, \forall x, x' \in \mathbb{R}^d, \left| v^\alpha(x) - v^\alpha(x') \right| \leq C \left(1 + |x|^2 + |x'|^2 \right).$$

Démonstration : *Cas où σ et $\psi(.,0)$ bornées, Ξ et σ $\mathcal{C}^1$.*

$$\begin{aligned} \mathrm{d} Y_t^{\alpha,x} &= -\left\{ \psi\left(X_t^x, Z_t^{\alpha,x}\right) - \alpha Y_t^{\alpha,x} \right\} \mathrm{d}t + Z_t^{\alpha,x} \, \mathrm{d}W_t \\ &= -\left\{ \psi\left(X_t^x, 0\right) - \alpha Y_t^{\alpha,x} \right\} \mathrm{d}t + Z_t^{\alpha,x} \left(\mathrm{d}W_t - \Gamma^\alpha\left(X_t^x\right) \mathrm{d}t \right) \end{aligned}$$

où $\Gamma^\alpha(x) = \frac{\psi(x, \nabla v^\alpha(x)\sigma(x)) - \psi(x,0)}{|\nabla v^\alpha(x)\sigma(x)|^2} \nabla v^\alpha(x)\sigma(x) \mathbb{1}_{\nabla v^\alpha(x)\sigma(x) \neq 0}$.

$$\mathrm{d} Y_t^{\alpha,x} = -\left\{ \psi\left(X_t^x, 0\right) - \alpha Y_t^{\alpha,x} \right\} \mathrm{d}t + Z_t^{\alpha,x} \, \mathrm{d}\widetilde{W}_t^{\alpha,x}$$

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\alpha t} Y_t^{\alpha,x} \right) = -\mathrm{e}^{-\alpha t} \psi\left(X_t^x, 0\right) \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\alpha t} Z_t^{\alpha,x} \, \mathrm{d}\widetilde{W}_t^{\alpha,x}$$

$$v^\alpha(x) = \widetilde{\mathbb{E}}^{\alpha,x,T} \left[\mathrm{e}^{-\alpha T} v^\alpha\left(X_T^x\right) + \int_0^T \mathrm{e}^{-\alpha s} \psi\left(X_s^x, 0\right) \mathrm{d}s \right]$$

Proposition

$$\exists C>0,\ \forall \alpha>0,\ \forall x,x'\in\mathbb{R}^d,\ \left|v^\alpha(x)-v^\alpha(x')\right|\leq C\left(1+|x|^2+|x'|^2\right).$$

Démonstration : *Cas où σ et $\psi(.,0)$ bornées, Ξ et σ $\mathcal{C}^1$.*

$$v^\alpha(x)=\widetilde{\mathbb{E}}^{\alpha,x,T}\left[\mathrm{e}^{-\alpha T}v^\alpha\left(X_T^x\right)+\int_0^T \mathrm{e}^{-\alpha s}\psi\left(X_s^x,0\right)\,\mathrm{d}s\right]$$

$$\mathrm{d}X_t^x=\left\{\Xi\left(X_t^x\right)+\sigma\left(X_t^x\right)\Gamma^\alpha\left(X_t^x\right)\right\}\mathrm{d}t+\sigma\left(X_t^x\right)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t^{\alpha,x}$$

Objectif : faire tendre α vers 0 pour construire une solution à l'EDSRE

Proposition

$$\exists C > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \forall x, x' \in \mathbb{R}^d,\ \left| v^\alpha(x) - v^\alpha(x') \right| \leq C \left(1 + |x|^2 + |x'|^2 \right).$$

Démonstration : *Cas où σ et $\psi(.,0)$ bornées, Ξ et σ $\mathcal{C}^1$.*

$$v^\alpha(x) = \widetilde{\mathbb{E}}^{\alpha,x,T} \left[e^{-\alpha T} v^\alpha\left(X_T^x\right) + \int_0^T e^{-\alpha s} \psi\left(X_s^x, 0\right) \mathrm{d}s \right]$$

$$\mathrm{d}X_t^x = \left\{ \Xi\left(X_t^x\right) + \sigma\left(X_t^x\right) \Gamma^\alpha\left(X_t^x\right) \right\} \mathrm{d}t + \sigma\left(X_t^x\right) \mathrm{d}\widetilde{W}_t^{\alpha,x}$$

Rappel : $\sup_{T>0} \widetilde{\mathbb{E}}^{\alpha,x,T} \left[|X_T^x|^2 \right] \leq C \left(1 + |x|^2 \right) < \infty.$

Objectif : faire tendre α vers 0 pour construire une solution à l'EDSRE

Proposition

$$\exists C > 0, \forall \alpha > 0, \forall x, x' \in \mathbb{R}^d, \left|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')\right| \leq C\left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right).$$

Démonstration : *Cas où σ et $\psi(.,0)$ bornées, Ξ et σ $\mathcal{C}^1$.*

$$v^\alpha(x) = \widetilde{\mathbb{E}}^{\alpha,x,T}\left[e^{-\alpha T} v^\alpha\left(X_T^x\right) + \int_0^T e^{-\alpha s}\psi\left(X_s^x, 0\right) \mathrm{d}s\right]$$

$$\mathrm{d}X_t^x = \left\{\Xi\left(X_t^x\right) + \sigma\left(X_t^x\right)\Gamma^\alpha\left(X_t^x\right)\right\}\mathrm{d}t + \sigma\left(X_t^x\right)\mathrm{d}\widetilde{W}_t^{\alpha,x}$$

Rappel : $\sup_{T>0} \widetilde{\mathbb{E}}^{\alpha,x,T}\left[|X_T^x|^2\right] \leq C\left(1 + |x|^2\right) < \infty$. Donc

$$e^{-\alpha T}\widetilde{\mathbb{E}}^{\alpha,x,T}\left[v^\alpha\left(X_T^x\right)\right] \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Objectif : faire tendre α vers 0 pour construire une solution à l'EDSRE

Proposition

$$\exists C > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \forall x, x' \in \mathbb{R}^d,\ \left|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')\right| \leq C\left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right).$$

Démonstration : *Cas où σ et $\psi(.,0)$ bornées, Ξ et σ $\mathcal{C}^1$.*

$$v^\alpha(x) = \widetilde{\mathbb{E}}^{\alpha,x,T}\left[e^{-\alpha T} v^\alpha\left(X_T^x\right) + \int_0^T e^{-\alpha s}\psi\left(X_s^x, 0\right) \mathrm{d}s\right]$$

$$\mathrm{d}X_t^x = \left\{\Xi\left(X_t^x\right) + \sigma\left(X_t^x\right)\Gamma^\alpha\left(X_t^x\right)\right\}\mathrm{d}t + \sigma\left(X_t^x\right)\mathrm{d}\widetilde{W}_t^{\alpha,x}$$

$$v^\alpha(x) = \lim_{T\to\infty}\widetilde{\mathbb{E}}^{\alpha,x,T}\left[\int_0^T e^{-\alpha s}\psi\left(X_s^x, 0\right)\mathrm{d}s\right]$$

Objectif : faire tendre α vers 0 pour construire une solution à l'EDSRE

Proposition

$$\exists C > 0, \forall \alpha > 0, \forall x, x' \in \mathbb{R}^d, \left| v^\alpha(x) - v^\alpha(x') \right| \leq C \left(1 + |x|^2 + |x'|^2 \right).$$

Démonstration : *Cas où σ et $\psi(.,0)$ bornées, Ξ et σ $\mathcal{C}^1$.*

$$\mathrm{d}X_t^x = \{\Xi\left(X_t^x\right) + \sigma\left(X_t^x\right)\Gamma^\alpha\left(X_t^x\right)\}\,\mathrm{d}t + \sigma\left(X_t^x\right)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t^{\alpha,x}$$

$$v^\alpha(x) = \lim_{T\to\infty} \widetilde{\mathbb{E}}^{\alpha,x,T}\left[\int_0^T \mathrm{e}^{-\alpha s}\psi\left(X_s^x,0\right)\,\mathrm{d}s\right]$$

$$\left| v^\alpha(x) - v^\alpha(x') \right| \leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha s}\left| \widetilde{\mathbb{E}}^{\alpha,x,s}\left[\psi\left(X_s^x,0\right)\right] - \widetilde{\mathbb{E}}^{\alpha,x',s}\left[\psi\left(X_s^{x'},0\right)\right]\right|\,\mathrm{d}s$$

Objectif : faire tendre α vers 0 pour construire une solution à l'EDSRE

Proposition

$$\exists C > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \forall x, x' \in \mathbb{R}^d,\ \left|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')\right| \leq C\left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right).$$

Démonstration : *Cas où σ et $\psi(.,0)$ bornées, Ξ et σ $\mathcal{C}^1$.*

$$\mathrm{d}X_t^x = \{\Xi(X_t^x) + \sigma(X_t^x)\Gamma^\alpha(X_t^x)\}\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t^x)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t^{\alpha,x}$$

$$\left|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')\right| \leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha s}\left|\widetilde{\mathcal{P}}_s^\alpha[\psi(\cdot,0)](x) - \widetilde{\mathcal{P}}_s^\alpha[\psi(\cdot,0)](x')\right|\mathrm{d}s$$

Objectif : faire tendre α vers 0 pour construire une solution à l'EDSRE

Proposition

$$\exists C > 0, \forall \alpha > 0, \forall x, x' \in \mathbb{R}^d, \left|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')\right| \leq C \left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right).$$

Démonstration : *Cas où σ et $\psi(.,0)$ bornées, Ξ et σ $\mathcal{C}^1$.*

$$\mathrm{d}X_t^x = \{\Xi(X_t^x) + \sigma(X_t^x)\Gamma^\alpha(X_t^x)\}\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t^x)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t^{\alpha,x}$$

$$\left|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')\right| \leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha s} \left|\widetilde{\mathcal{P}}_s^\alpha[\psi(\cdot,0)](x) - \widetilde{\mathcal{P}}_s^\alpha[\psi(\cdot,0)](x')\right| \mathrm{d}s$$

Lemme

Soit ϕ une fonction à croissance quadratique. Le semigroupe $\mathcal{P}$ de X sous la loi $\mathbb{P}$ vérifie :

$$\left|\mathcal{P}_t[\phi](x) - \mathcal{P}_t[\phi](x')\right| \leq c\left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right)\mathrm{e}^{-\nu t}.$$

Objectif : faire tendre α vers 0 pour construire une solution à l'EDSRE

Proposition

$$\exists C > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \forall x, x' \in \mathbb{R}^d,\ \left|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')\right| \leq C\left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right).$$

Démonstration : *Cas où σ et $\psi(.,0)$ bornées, Ξ et σ $\mathcal{C}^1$.*

$$\mathrm{d}X_t^x = \left\{\Xi\left(X_t^x\right) + \sigma\left(X_t^x\right)\Gamma^\alpha\left(X_t^x\right)\right\}\mathrm{d}t + \sigma\left(X_t^x\right)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t^{\alpha,x}$$

$$\left|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')\right| \leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha s}\left|\widetilde{\mathcal{P}}_s^\alpha[\psi(\cdot,0)](x) - \widetilde{\mathcal{P}}_s^\alpha[\psi(\cdot,0)](x')\right|\mathrm{d}s$$

Lemme

Soit ϕ une fonction à croissance quadratique. Si $\nabla v^\alpha \sigma$ est continue, alors le semigroupe $\widetilde{\mathcal{P}}^\alpha$ de X sous la loi $\widetilde{\mathbb{P}}^{\alpha,x,T}$ vérifie :

$$\left|\widetilde{\mathcal{P}}_t^\alpha[\phi](x) - \widetilde{\mathcal{P}}_t^\alpha[\phi](x')\right| \leq \widetilde{c}\left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right)\mathrm{e}^{-\widetilde{\nu} t},$$

et $\widetilde{c}$ et $\widetilde{\nu}$ sont indépendantes de α, $\|\sigma\|_\infty$ et $\|\psi(\cdot,0)\|_\infty$.

Proposition

$$\exists C > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \forall x, x' \in \mathbb{R}^d,\ \left|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')\right| \leq C\left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right).$$

Démonstration : *Cas où σ et $\psi(.,0)$ bornées, Ξ et σ $\mathcal{C}^1$.*

$$\mathrm{d}X_t^x = \left\{\Xi\left(X_t^x\right) + \sigma\left(X_t^x\right)\Gamma^\alpha\left(X_t^x\right)\right\}\mathrm{d}t + \sigma\left(X_t^x\right)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t^{\alpha,x}$$

Quand $\psi(\cdot,0)$ et σ bornées, Ξ, σ et ψ $\mathcal{C}^1$, alors $\nabla v^\alpha \sigma$ est continue et :

$$\begin{aligned}\left|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')\right| &\leq \widetilde{c}\left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha s}\mathrm{e}^{-\widetilde{\nu}s}\,\mathrm{d}s \\ &\leq \frac{\widetilde{c}}{\alpha + \widetilde{\nu}}\left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right) \\ &\leq \frac{\widetilde{c}}{\widetilde{\nu}}\left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right)\end{aligned}$$

Dans le cas général, on commence par faire une approximation.

Objectif : faire tendre α vers 0 pour construire une solution à l'EDSRE

$$Y_t^{\alpha,x} = Y_T^{\alpha,x} + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^{\alpha,x}) - \alpha Y_s^{\alpha,x}\} \, \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{\alpha,x} \, \mathrm{d}W_s$$

Objectif : faire tendre α vers 0 pour construire une solution à l'EDSRE

$$v^\alpha(X_t^x) = v^\alpha(X_T^x) + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^{\alpha,x}) - \alpha v^\alpha(X_s^x)\} \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{\alpha,x} \, \mathrm{d}W_s$$

Objectif : faire tendre α vers 0 pour construire une solution à l'EDSRE

$$v^\alpha(X_t^x) = v^\alpha(X_T^x) + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^{\alpha,x}) - \alpha v^\alpha(X_s^x)\}\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{\alpha,x}\,\mathrm{d}W_s$$

On pose $\overline{v}^\alpha(x) = v^\alpha(x) - v^\alpha(0)$;

$$|\overline{v}^\alpha(x)| \leq C\left(1 + |x|^2\right).$$

$$v^{\alpha}(X_t^x) = v^{\alpha}(X_T^x) + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^{\alpha,x}) - \alpha v^{\alpha}(X_s^x)\}\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{\alpha,x}\,\mathrm{d}W_s$$

On pose $\overline{v}^{\alpha}(x) = v^{\alpha}(x) - v^{\alpha}(0)$;

$$|\alpha v^{\alpha}(0)| \leq C \quad \text{et} \quad |\overline{v}^{\alpha}(x)| \leq C\left(1 + |x|^2\right).$$

Objectif : faire tendre α vers 0 pour construire une solution à l'EDSRE

$$v^\alpha(X_t^x) = v^\alpha(X_T^x) + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^{\alpha,x}) - \alpha v^\alpha(X_s^x)\} \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{\alpha,x} \, \mathrm{d}W_s$$

On pose $\overline{v}^\alpha(x) = v^\alpha(x) - v^\alpha(0)$;

$$|\alpha v^\alpha(0)| \leq C \quad \text{et} \quad |\overline{v}^\alpha(x)| \leq C\left(1 + |x|^2\right).$$

Extraction diagonale :

$$\alpha_n v^{\alpha_n}(0) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda \quad \text{et} \quad \overline{v}^{\alpha_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} v$$

Objectif : faire tendre α vers 0 pour construire une solution à l'EDSRE

$$v^\alpha(X_t^x) = v^\alpha(X_T^x) + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^{\alpha,x}) - \alpha v^\alpha(X_s^x)\}\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{\alpha,x}\,\mathrm{d}W_s$$

On pose $\overline{v}^\alpha(x) = v^\alpha(x) - v^\alpha(0)$;

$$|\alpha v^\alpha(0)| \leq C \quad \text{et} \quad |\overline{v}^\alpha(x)| \leq C\left(1 + |x|^2\right).$$

Extraction diagonale :

$$\alpha_n v^{\alpha_n}(0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \quad \text{et} \quad \overline{v}^{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v \text{ sur une partie dense.}$$

Objectif : faire tendre α vers 0 pour construire une solution à l'EDSRE

On pose $\overline{v}^{\alpha}(x) = v^{\alpha}(x) - v^{\alpha}(0)$;

$$|\alpha v^{\alpha}(0)| \leq C \quad \text{et} \quad |\overline{v}^{\alpha}(x)| \leq C\left(1 + |x|^2\right).$$

Extraction diagonale :

$$\alpha_n v^{\alpha_n}(0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \quad \text{et} \quad \overline{v}^{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v \text{ sur une partie dense.}$$

$$\overline{v}^{\alpha_n}(X_t^x) = \overline{v}^{\alpha_n}(X_T^x) + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^{\alpha_n,x}) - \alpha_n \overline{v}^{\alpha_n}(X_s^x) - \alpha_n v^{\alpha_n}(0)\} \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{\alpha_n,x} \,\mathrm{d}W_s$$

Objectif : faire tendre α vers 0 pour construire une solution à l'EDSRE

On pose $\overline{v}^\alpha(x) = v^\alpha(x) - v^\alpha(0)$;

$$|\alpha v^\alpha(0)| \leq C \quad \text{et} \quad |\overline{v}^\alpha(x)| \leq C\left(1 + |x|^2\right).$$

Extraction diagonale :

$$\alpha_n v^{\alpha_n}(0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \quad \text{et} \quad \overline{v}^{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v \text{ sur une partie dense.}$$

$$\overline{v}^{\alpha_n}(X_t^x) = \overline{v}^{\alpha_n}(X_T^x) + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^{\alpha_n,x}) - \alpha_n \overline{v}^{\alpha_n}(X_s^x) - \alpha_n v^{\alpha_n}(0)\}\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{\alpha_n,x}\,\mathrm{d}W_s$$

Proposition (Un résultat de type Bismut-Elworthy)

$$\exists C > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \forall x, x' \in \mathbb{R}^d,\ \left|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')\right| \leq C\left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right)|x - x'|$$

Objectif : faire tendre α vers 0 pour construire une solution à l'EDSRE

On pose $\overline{v}^{\alpha}(x) = v^{\alpha}(x) - v^{\alpha}(0)$;

$$|\alpha v^{\alpha}(0)| \leq C \quad \text{et} \quad |\overline{v}^{\alpha}(x)| \leq C\left(1 + |x|^2\right).$$

Extraction diagonale :

$$\alpha_n v^{\alpha_n}(0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \quad \text{et} \quad \overline{v}^{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v \text{ sur une partie dense.}$$

$$\overline{v}^{\alpha_n}(X_t^x) = \overline{v}^{\alpha_n}(X_T^x) + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^{\alpha_n,x}) - \alpha_n \overline{v}^{\alpha_n}(X_s^x) - \alpha_n v^{\alpha_n}(0)\}\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{\alpha_n,x}\,\mathrm{d}W_s$$

Proposition (Un résultat de type Bismut-Elworthy)

$$\exists C > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \forall x, x' \in \mathbb{R}^d,\ \left|v^{\alpha}(x) - v^{\alpha}(x')\right| \leq C\left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right)|x - x'|$$

v s'étend sur $\mathbb{R}^d$ comme limite simple de $\overline{v}^{\alpha_n}$.

Objectif : faire tendre α vers 0 pour construire une solution à l'EDSRE

On pose $\overline{v}^\alpha(x) = v^\alpha(x) - v^\alpha(0)$;

$$|\alpha v^\alpha(0)| \leq C \quad \text{et} \quad |\overline{v}^\alpha(x)| \leq C\left(1 + |x|^2\right).$$

Extraction diagonale :

$$\alpha_n v^{\alpha_n}(0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \quad \text{et} \quad \overline{v}^{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v \text{ sur une partie dense.}$$

$$\overline{v}^{\alpha_n}(X_t^x) = \overline{v}^{\alpha_n}(X_T^x) + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^{\alpha_n,x}) - \alpha_n \overline{v}^{\alpha_n}(X_s^x) - \alpha_n v^{\alpha_n}(0)\}\, \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{\alpha_n,x}\, \mathrm{d}W_s$$

Proposition (Un résultat de type Bismut-Elworthy)

$$\exists C > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \forall x, x' \in \mathbb{R}^d,\ \left|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')\right| \leq C\left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right)|x - x'|$$

v s'étend sur $\mathbb{R}^d$ comme limite simple de $\overline{v}^{\alpha_n}$.
$\left(Z^{\alpha_n,x}\right)_n$ est de Cauchy pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ $\rightsquigarrow$ processus limite Z^x

Existence et unicité d'une solution à l'EDSRE

Théorème (Hu, L.)

Il existe un réel λ, une fonction v localement Lipschitz et nulle en 0 et un processus Z^x de carré intégrable en temps (localement) et en aléa tels que

$$\forall 0 \leq t \leq T < \infty,\ Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^x) - \lambda\}\, ds - \int_t^T Z_s^x\, dW_s,$$

où $Y_t^x = v(X_t^x)$.
De plus, v est à croissance quadratique et Z^x s'exprime comme fonction mesurable de X^x.

Théorème (Hu, L.)

Il existe un réel λ, une fonction v localement Lipschitz et nulle en 0 et un processus Z^x de carré intégrable en temps (localement) et en aléa tels que

$$\forall 0 \leq t \leq T < \infty,\ Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \{\psi(X_s^x, Z_s^x) - \lambda\}\, ds - \int_t^T Z_s^x\, dW_s,$$

où $Y_t^x = v(X_t^x)$.
De plus, v est à croissance quadratique et Z^x s'exprime comme fonction mesurable de X^x.

Théorème (Hu, L.)

Soient

- *v, v' des fonctions continues, à croissance quadratique, nulles en 0 ;*
- *ζ, ζ' des fonctions mesurables ;*
- *λ, λ' des réels.*

On suppose que pour tout x, $(v(X_t^x), \zeta(X_t^x), \lambda)$ et $(v'(X_t^x), \zeta'(X_t^x), \lambda')$ sont solutions.
Alors $\lambda = \lambda'$, $v = v'$ et $\zeta(X_t^x) = \zeta'(X_t^x)$ $\mathbb{P}$-p.s. et pour p.t. $t \in \mathbb{R}_+$.

Comportement en temps long

Soit ξ^T une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable telle que $|\xi^T| \leq c\left(1 + |X_T^x|^2\right)$.
On considère l'EDSR d'horizon fini :

$$\forall t \in [0, T],\ Y_t^{T,x} = \xi^T + \int_t^T \psi\left(X_s^x, Z_s^{T,x}\right) \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{T,x} \, \mathrm{d}W_s.$$

Soit ξ^T une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable telle que $|\xi^T| \leq c\left(1+|X_T^x|^2\right)$.
On considère l'EDSR d'horizon fini :

$$\forall t \in [0,T],\ Y_t^{T,x} = \xi^T + \int_t^T \psi\left(X_s^x, Z_s^{T,x}\right) \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{T,x}\,\mathrm{d}W_s.$$

Proposition (Hu, L.)

$$\exists C>0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall T>0,\ \left|\frac{Y_0^{T,x}}{T} - \lambda\right| \leq \frac{C\left(1+|x|^2\right)}{T}.$$

Comportement en temps long

Soit ξ^T une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable telle que $|\xi^T| \leq c\left(1 + |X_T^x|^2\right)$.
On considère l'EDSR d'horizon fini :

$$\forall t \in [0, T],\ Y_t^{T,x} = \xi^T + \int_t^T \psi\left(X_s^x, Z_s^{T,x}\right) \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{T,x} \,\mathrm{d}W_s.$$

Proposition (Hu, L.)

$$\exists C > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall T > 0,\ \left| \frac{Y_0^{T,x}}{T} - \lambda \right| \leq \frac{C\left(1 + |x|^2\right)}{T}.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} &Y_0^{T,x} - Y_0^x - \lambda T \\ &= \xi^T - v\left(X_T^x\right) + \int_0^T \left\{\psi\left(X_s^x, Z_s^{T,x}\right) - \psi\left(X_s^x, Z_s^x\right)\right\} \mathrm{d}s - \int_0^T \left\{Z_s^{T,x} - Z_s^x\right\} \mathrm{d}W_s \end{aligned}$$

Soit ξ^T une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable telle que $\left|\xi^T\right| \leq c\left(1+\left|X_T^x\right|^2\right)$.
On considère l'EDSR d'horizon fini :

$$\forall t \in [0,T],\ Y_t^{T,x} = \xi^T + \int_t^T \psi\left(X_s^x, Z_s^{T,x}\right)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{T,x}\,\mathrm{d}W_s.$$

Proposition (Hu, L.)

$$\exists C>0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall T>0,\ \left|\frac{Y_0^{T,x}}{T} - \lambda\right| \leq \frac{C\left(1+|x|^2\right)}{T}.$$

Démonstration :

$$Y_0^{T,x} - Y_0^x - \lambda T$$
$$= \xi^T - v\left(X_T^x\right) + \int_0^T \left\{\psi\left(X_s^x, Z_s^{T,x}\right) - \psi\left(X_s^x, Z_s^x\right)\right\}\mathrm{d}s - \int_0^T \left\{Z_s^{T,x} - Z_s^x\right\}\mathrm{d}W_s$$
$$= \widetilde{\mathbb{E}}^{x,T}\left[\xi^T - v\left(X_T^x\right)\right]$$

Soit ξ^T une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable telle que $\left|\xi^T\right| \leq c\left(1+\left|X_T^x\right|^2\right)$.
On considère l'EDSR d'horizon fini :

$$\forall t \in [0,T],\ Y_t^{T,x} = \xi^T + \int_t^T \psi\left(X_s^x, Z_s^{T,x}\right) \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{T,x}\,\mathrm{d}W_s.$$

Proposition (Hu, L.)

$$\exists C>0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall T>0,\ \left|\frac{Y_0^{T,x}}{T} - \lambda\right| \leq \frac{C\left(1+|x|^2\right)}{T}.$$

Démonstration :

$$Y_0^{T,x} - Y_0^x - \lambda T$$

$$= \xi^T - v\left(X_T^x\right) + \int_0^T \left\{\psi\left(X_s^x, Z_s^{T,x}\right) - \psi\left(X_s^x, Z_s^x\right)\right\} \mathrm{d}s - \int_0^T \left\{Z_s^{T,x} - Z_s^x\right\} \mathrm{d}W_s$$

$$= \widetilde{\mathbb{E}}^{x,T}\left[\xi^T - v\left(X_T^x\right)\right]$$

Rappel : $\sup_{T>0} \widetilde{\mathbb{E}}^{x,T}\left[|X_T^x|^2\right] \leq C\left(1+|x|^2\right)$.

Comportement en temps long

Théorème (Hu, L.)

Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *telle que* $|g(x)| \leq C\left(1+|x|^2\right)$ *et* $|g(x)-g(x')| \leq C\left(1+|x|^2+|x'|^2\right)|x-x'|$. *On suppose que* $\xi^T = g\left(X_T^x\right)$.
Alors il existe $L \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} L.$$

On dispose même de la vitesse de convergence :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall T>0,\ \left|Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x - L\right| \leq C\left(1+|x|^2\right)e^{-\nu T}.$$

Comportement en temps long

Théorème (Hu, L.)

Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *telle que* $|g(x)| \leq C\left(1 + |x|^2\right)$ *et* $|g(x) - g(x')| \leq C\left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right)|x - x'|$*. On suppose que* $\xi^T = g\left(X_T^x\right)$*.*
Alors il existe $L \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x \underset{T \to \infty}{\longrightarrow} L.$$

On dispose même de la vitesse de convergence :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall T > 0, \left|Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x - L\right| \leq C\left(1 + |x|^2\right) e^{-\nu T}.$$

Démonstration : On considère $w_T(x) = Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x$.

1. $|w_T(x)| \leq C\left(1 + |x|^2\right) \rightsquigarrow$ Extraction diagonale $\rightsquigarrow$ Convergence de w_{T_i} sur un ensemble dense D

Théorème (Hu, L.)

Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *telle que* $|g(x)| \leq C\left(1+|x|^2\right)$ *et* $|g(x)-g(x')| \leq C\left(1+|x|^2+|x'|^2\right)|x-x'|$. *On suppose que* $\xi^T = g\left(X_T^x\right)$. *Alors il existe* $L \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} L.$$

On dispose même de la vitesse de convergence :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall T>0, \left|Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x - L\right| \leq C\left(1+|x|^2\right)e^{-\nu T}.$$

Démonstration : On considère $w_T(x) = Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x$.

1. $|w_T(x)| \leq C\left(1+|x|^2\right) \rightsquigarrow$ Extraction diagonale $\rightsquigarrow$ Convergence de w_{T_i} sur un ensemble dense D
2. $|w_T(x)-w_T(y)| \leq C\left(1+|x|^2+|y|^2\right)\mathrm{e}^{-\nu T} \rightsquigarrow w_{T_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} L$ sur D

Comportement en temps long

Théorème (Hu, L.)

Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *telle que* $|g(x)| \leq C\left(1+|x|^2\right)$ *et* $|g(x)-g(x')| \leq C\left(1+|x|^2+|x'|^2\right)|x-x'|$. *On suppose que* $\xi^T = g\left(X_T^x\right)$. *Alors il existe* $L \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} L.$$

On dispose même de la vitesse de convergence :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall T > 0, \left|Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x - L\right| \leq C\left(1+|x|^2\right)e^{-\nu T}.$$

Démonstration : On considère $w_T(x) = Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x$.

1. $|w_T(x)| \leq C\left(1+|x|^2\right) \rightsquigarrow$ Extraction diagonale $\rightsquigarrow$ Convergence de w_{T_i} sur un ensemble dense D
2. $|w_T(x) - w_T(y)| \leq C\left(1+|x|^2+|y|^2\right)e^{-\nu T} \rightsquigarrow w_{T_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} L$ sur D
3. $|w_T(x) - w_T(y)| \leq C\left(1+|x|^2+|y|^2\right)|x-y| \rightsquigarrow w_{T_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} L$ sur $\mathbb{R}^d$

Théorème (Hu, L.)

Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *telle que* $|g(x)| \leq C\left(1+|x|^2\right)$ *et* $|g(x)-g(x')| \leq C\left(1+|x|^2+|x'|^2\right)|x-x'|$. *On suppose que* $\xi^T = g\left(X_T^x\right)$. *Alors il existe* $L \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} L.$$

On dispose même de la vitesse de convergence :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall T > 0, \left|Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x - L\right| \leq C\left(1+|x|^2\right)e^{-\nu T}.$$

Démonstration : On considère $w_T(x) = Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x$.

1. $|w_T(x)| \leq C\left(1+|x|^2\right) \rightsquigarrow$ Extraction diagonale $\rightsquigarrow$ Convergence de w_{T_i} sur un ensemble dense D
2. $|w_T(x) - w_T(y)| \leq C\left(1+|x|^2+|y|^2\right)e^{-\nu T} \rightsquigarrow w_{T_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} L$ sur D
3. $|w_T(x) - w_T(y)| \leq C\left(1+|x|^2+|y|^2\right)|x-y| \rightsquigarrow w_{T_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} L$ sur $\mathbb{R}^d$
4. Soit K un compact, L est un point d'accumulation de $\mathcal{A} = \{w_{T\,|K} | T > 1\} \subset \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$

Théorème (Hu, L.)

Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *telle que* $|g(x)| \leq C\left(1+|x|^2\right)$ *et* $|g(x)-g(x')| \leq C\left(1+|x|^2+|x'|^2\right)|x-x'|$*. On suppose que* $\xi^T = g\left(X_T^x\right)$*. Alors il existe* $L \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} L.$$

On dispose même de la vitesse de convergence :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall T > 0, \left|Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x - L\right| \leq C\left(1+|x|^2\right) e^{-\nu T}.$$

Démonstration : On considère $w_T(x) = Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x$.

1. $|w_T(x)| \leq C\left(1+|x|^2\right) \rightsquigarrow$ Extraction diagonale $\rightsquigarrow$ Convergence de w_{T_i} sur un ensemble dense D
2. $|w_T(x) - w_T(y)| \leq C\left(1+|x|^2+|y|^2\right) e^{-\nu T} \rightsquigarrow w_{T_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} L$ sur D
3. $|w_T(x) - w_T(y)| \leq C\left(1+|x|^2+|y|^2\right)|x-y| \rightsquigarrow w_{T_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} L$ sur $\mathbb{R}^d$
4. Soit K un compact, L est un point d'accumulation de $\mathcal{A} = \{w_{T|K} | T > 1\} \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$

Par Ascoli, il reste à montrer que L est l'unique point d'accumulation de $\mathcal{A}$.

On note $\mathcal{L}$ le générateur du semigroupe de Kolmogorov associé à l'EDS vérifiée par X.

EDP Hamilton-Jacobi-Bellman	EDSR d'horizon fini
$\begin{cases} f(x, \partial_x u_T(t,x)\sigma(x)) + \partial_t u_T(t,x) \\ \qquad\qquad\qquad + \mathcal{L} u_T(t,x) = 0 \\ u_T(T,x) = g(x) \end{cases}$	$Y_t = g(X_T) + \int_t^T f(X_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s$

Application aux EDP Hamilton-Jacobi-Bellman

On note $\mathcal{L}$ le générateur du semigroupe de Kolmogorov associé à l'EDS vérifiée par X.

EDP Hamilton-Jacobi-Bellman	EDSR d'horizon fini
$\begin{cases} f(x, \partial_x u_T(t,x)\sigma(x)) + \partial_t u_T(t,x) \\ \qquad\qquad + \mathcal{L}u_T(t,x) = 0 \\ u_T(T,x) = g(x) \end{cases}$	$Y_t = g(X_T) + \int_t^T f(X_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s$

	EDSR ergodique
	$Y_t = Y_T + \int_t^T \{f(X_s, Z_s) - \lambda\}\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s$

On note $\mathcal{L}$ le générateur du semigroupe de Kolmogorov associé à l'EDS vérifiée par X.

EDP Hamilton-Jacobi-Bellman	EDSR d'horizon fini
$\begin{cases} f(x,\partial_x u_T(t,x)\sigma(x)) + \partial_t u_T(t,x) \\ \qquad\qquad + \mathcal{L}u_T(t,x) = 0 \\ u_T(T,x) = g(x) \end{cases}$	$Y_t = g(X_T) + \int_t^T f(X_s,Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s$

EDP Hamilton-Jacobi-Bellman ergodique	EDSR ergodique
$f(x,\nabla v(x)\sigma(x)) + \mathcal{L}v(x) = \lambda$	$Y_t = Y_T + \int_t^T \{f(X_s,Z_s) - \lambda\}\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s$

On note $\mathcal{L}$ le générateur du semigroupe de Kolmogorov associé à l'EDS vérifiée par X.

EDP Hamilton-Jacobi-Bellman	EDSR d'horizon fini
$\begin{cases} f(x,\partial_x u_T(t,x)\sigma(x)) + \partial_t u_T(t,x) \\ \qquad\qquad\qquad + \mathcal{L}u_T(t,x) = 0 \\ u_T(T,x) = g(x) \end{cases}$	$Y_t = g(X_T) + \int_t^T f(X_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s$

EDP Hamilton-Jacobi-Bellman ergodique	EDSR ergodique
$f(x, \nabla v(x)\sigma(x)) + \mathcal{L}v(x) = \lambda$	$Y_t = Y_T + \int_t^T \{f(X_s, Z_s) - \lambda\}\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s$

Théorème (Hu, L.)

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall T > 0,\ |u_T(0,x) - \lambda T - v(x) - L| \leq C\left(1 + |x|^2\right) e^{-\nu T}.$$

Application aux EDP Hamilton-Jacobi-Bellman

On note $\mathcal{L}$ le générateur du semigroupe de Kolmogorov associé à l'EDS vérifiée par X.

EDP Hamilton-Jacobi-Bellman	EDSR d'horizon fini
$\begin{cases} f(x, \partial_x u_T(t,x)\sigma(x)) + \partial_t u_T(t,x) \\ \qquad\qquad + \mathcal{L}u_T(t,x) = 0 \\ u_T(T,x) = g(x) \end{cases}$	$Y_t = g(X_T) + \int_t^T f(X_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s$

EDP Hamilton-Jacobi-Bellman ergodique	EDSR ergodique
$f(x, \nabla v(x)\sigma(x)) + \mathcal{L}v(x) = \lambda$	$Y_t = Y_T + \int_t^T \{f(X_s, Z_s) - \lambda\}\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s$

Théorème (Hu, L.)

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall T > 0, |u_T(0,x) - \lambda T - v(x) - L| \leq C\left(1 + |x|^2\right) e^{-\nu T}.$$

Merci pour votre attention.