Introduction aux EDSR et quelques applications

Florian Lemonnier

Séminaire Gaussbusters

20 mars 2017

On se donne un mouvement brownien W k-dimensionnel, défini sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dont la filtration naturelle augmentée est notée $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

C'est quoi, une EDSR ?

Une EDS, ça ressemble à ça :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\,\mathrm{d}W_t \\ X_0 = \xi \end{cases}$$

avec ξ va $\mathcal{F}_0$-mesurable, $b : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}_{d,k}(\mathbb{R})$.

C'est quoi, une EDSR ?

Une EDS, ça ressemble à ça :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = b\left(t, X_t\right)\,\mathrm{d}t + \sigma\left(t, X_t\right)\,\mathrm{d}W_t \\ X_0 = \xi \end{cases}$$

avec ξ va $\mathcal{F}_0$-mesurable, $b : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et
$\sigma : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}_{d,k}(\mathbb{R})$.
Une solution X est un processus d-dimensionnel, $(\mathcal{F}_t)$-adapté, continu et vérifiant $\mathbb{P}$-ps :

$$\begin{cases} \int_0^t \left|b\left(s, X_s\right)\right|\,\mathrm{d}s + \int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s\right)\right|^2\,\mathrm{d}s < \infty \\ X_t - \xi = \int_0^t b\left(s, X_s\right)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right)\,\mathrm{d}W_s \end{cases}$$

C'est quoi, une EDSR ?

On aurait envie de poser pour une EDSR :

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = -f\left(t, Y_t\right)\,\mathrm{d}t + g\left(t, Y_t\right)\,\mathrm{d}W_t \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

avec ξ va $\mathcal{F}_T$-mesurable, $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $g : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$.

C'est quoi, une EDSR ?

On aurait envie de poser pour une EDSR :

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = -f(t, Y_t)\,\mathrm{d}t + g(t, Y_t)\,\mathrm{d}W_t \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

avec ξ va $\mathcal{F}_T$-mesurable, $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $g : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$.

Théorème (Représentation des martingales browniennes)

Soit M une $(\mathcal{F}_t)$-martingale issue de 0 telle que $\forall t \geq 0$, $\mathbb{E}\left[M_t^2\right] < \infty$.
Alors il existe un unique processus Z progressivement mesurable et tel que pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |Z_s|^2\, ds\right] < \infty \text{ et } M_t = \int_0^t Z_s\, dW_s.$$

C'est quoi, une EDSR ?

Forme générale des EDSR :

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = -f(t, Y_t)\,\mathrm{d}t + [g(t, Y_t) + Z_t]\,\mathrm{d}W_t \\ Y_T = \xi \ \text{ de carré intégrable} \end{cases}$$

avec ξ va $\mathcal{F}_T$-mesurable, $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $g : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$.

C'est quoi, une EDSR ?

Forme générale des EDSR :

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = -f\left(t, Y_t\right)\,\mathrm{d}t + Z_t\,\mathrm{d}W_t \\ Y_T = \xi \quad \text{de carré intégrable} \end{cases}$$

avec ξ va $\mathcal{F}_T$-mesurable, $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

C'est quoi, une EDSR ?

Forme générale des EDSR :

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = -f\left(t, Y_t, Z_t\right)\mathrm{d}t + Z_t\,\mathrm{d}W_t \\ Y_T = \xi \quad \text{de carré intégrable} \end{cases}$$

avec ξ va $\mathcal{F}_T$-mesurable, $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$.

C'est quoi, une EDSR ?

Forme générale des EDSR :

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = -f\,(t, Y_t, Z_t)\;\mathrm{d}t + Z_t\,\mathrm{d}W_t \\ Y_T = \xi \;\text{ de carré intégrable} \end{cases}$$

avec ξ va $\mathcal{F}_T$-mesurable, $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$.

Une solution (Y, Z) à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$, où Y est continu adapté et Z progressivement mesurable, vérifie $\mathbb{P}$-ps :

$$\begin{cases} \int_0^T |f\,(s, Y_s, Z_s)|\;\mathrm{d}s + \int_0^T |Z_s|^2\;\mathrm{d}s < \infty \\ Y_t = \xi + \int_t^T f\,(s, Y_s, Z_s)\;\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s \end{cases}$$

Théorème fondamental

Théorème (Pardoux, Peng 90 ; El Karoui, Peng, Quénez 97)

On suppose que :

- f *est globalement lipschitzienne en* (y, z) *uniformément en* (ω, t) *;*
- $\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s,0,0)|^2\, ds\right] < \infty.$

Alors l'EDSR admet une unique solution telle que Z *soit de carré intégrable.*

Théorème fondamental

Théorème (Pardoux, Peng 90 ; El Karoui, Peng, Quénez 97)

On suppose que :

- f *est globalement lipschitzienne en* (y, z) *uniformément en* (ω, t) *;*
- $\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s, 0, 0)|^2 \, ds\right] < \infty.$

Alors l'EDSR admet une unique solution telle que Z *soit de carré intégrable.*

Démonstration.

Utilisation d'un théorème de point fixe dans l'espace de Banach

$$\left\{ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z} \text{ prog. mes. et } \mathrm{Y} \text{ continu} \,\middle|\, \mathbb{E}\left[\sup_{0 \le t \le T} |Y_t|^2 + \int_0^T |Z_s|^2 \, \mathrm{d}s\right] < \infty \right\}. \qquad \square$$

Théorème fondamental

Théorème (Pardoux, Peng 90 ; El Karoui, Peng, Quénez 97)

On suppose que :

- *f est globalement lipschitzienne en (y, z) uniformément en (ω, t) ;*
- $\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s,0,0)|^2\, ds\right] < \infty$.

Alors l'EDSR admet une unique solution telle que Z soit de carré intégrable.

Démonstration.

Utilisation d'un théorème de point fixe dans l'espace de Banach

$$\left\{ Y,\ Z \text{ prog. mes. et } Y \text{ continu} \,\middle|\, \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} |Y_t|^2 + \int_0^T |Z_s|^2 \, \mathrm{d}s\right] < \infty \right\}.$$ □

On en déduit une méthode numérique pour résoudre une EDSR :

$$Y^{(0)} = Z^{(0)} = 0 \;;\; Y_t^{(n+1)} + \int_t^T Z_s^{(n+1)}\, \mathrm{d}W_s = \xi + \int_t^T f\left(s, Y_s^{(n)}, Z_s^{(n)}\right) \mathrm{d}s.$$

EDSR à horizon aléatoire

La condition terminale est prise en un temps d'arrêt τ :

$$Y_t = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f\left(s, Y_s, Z_s\right)\, \mathrm{d}s - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} Z_s \,\mathrm{d}W_s.$$

EDSR à horizon aléatoire

La condition terminale est prise en un temps d'arrêt τ :

$$Y_t = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(s, Y_s, Z_s)\, \mathrm{d}s - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} Z_s \,\mathrm{d}W_s.$$

Théorème (Darling, Pardoux 97)

On suppose que :

- $\xi = 0$ *sur* $\{\tau = +\infty\}$;
- f *est globalement lipschitzienne en* (y, z), *uniformément en* (ω, t) ;
- $\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^\tau |f(t,0,0)|^2 \, dt\right] < \infty$.

Alors l'EDSR admet une unique solution telle que Z soit de carré intégrable.

EDSR à horizon infini

On prend $\tau = +\infty$ et $\xi = 0$:

$$Y_t = \int_t^{+\infty} f\left(s, Y_s, Z_s\right) \mathrm{d}s - \int_t^{+\infty} Z_s \,\mathrm{d}W_s,\ 0 \leq t < +\infty.$$

EDSR à horizon infini

On prend $\tau = +\infty$ et $\xi = 0$:

$$Y_t = \int_t^{+\infty} f\left(s, Y_s, Z_s\right) \mathrm{d}s - \int_t^{+\infty} Z_s \,\mathrm{d}W_s,\ 0 \leq t < +\infty.$$

Par soustraction :

$$Y_t = Y_T + \int_t^{T} f\left(s, Y_s, Z_s\right) \mathrm{d}s - \int_t^{T} Z_s \,\mathrm{d}W_s,\ 0 \leq t \leq T < +\infty.$$

La dépendance en aléa du générateur f ne provient que d'une diffusion, c'est-à-dire :

$$Y_t = Y_T + \int_t^T f\left(s, X_s, Y_s, Z_s\right)\, \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \, \mathrm{d}W_s,$$

avec

$$X_t = x + \int_0^t b\left(s, X_s\right)\, \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right)\, \mathrm{d}W_s,$$

où $x \in \mathbb{R}^d$, $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}_{d,k}(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$.

Plus précisément, considérons l'EDSR à horizon infini :

$$Y_t^{\alpha,x} = Y_T^{\alpha,x} + \int_t^T \left[\psi\left(X_s^x, Z_s^{\alpha,x}\right) - \alpha Y_s^{\alpha,x}\right] \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{\alpha,x} \,\mathrm{d}W_s,$$

$$\text{avec} \qquad X_t^x = x + \int_0^t \left[A X_s^x + \Gamma\left(X_s^x\right)\right] \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\left(X_s^x\right) \mathrm{d}W_s,$$

où $x \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\Gamma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $\psi : \mathbb{R}^d \times \left(\mathbb{R}^d\right)^* \to \mathbb{R}$.

Plus précisément, considérons l'EDSR à horizon infini :

$$Y_t^{\alpha,x} = Y_T^{\alpha,x} + \int_t^T \left[\psi\left(X_s^x, Z_s^{\alpha,x}\right) - \alpha Y_s^{\alpha,x}\right] \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{\alpha,x} \, \mathrm{d}W_s,$$

$$\text{avec} \qquad X_t^x = x + \int_0^t \left[AX_s^x + \Gamma\left(X_s^x\right)\right] \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\left(X_s^x\right) \mathrm{d}W_s,$$

où $x \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\Gamma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $\psi : \mathbb{R}^d \times \left(\mathbb{R}^d\right)^* \to \mathbb{R}$.

Hypothèses :

- σ prend ses valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ et $\sigma(\bullet)^{-1}$ est bornée ;
- Γ et σ sont bornées et $\mathcal{C}_b^1$;
- $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\langle Ax, x\rangle \leq -\eta |x|^2$;
- $\psi(\bullet, 0)$ est bornée par M et ψ est Lipschitz ;
- $\alpha > 0$.

Théorème

Sous ces hypothèses, cette EDSR admet une unique solution $(Y^{\alpha,x}, Z^{\alpha,x})$*, telle que* $Y^{\alpha,x}$ *soit un processus continu borné et* $Z^{\alpha,x} \in L^2_{\mathcal{P},loc}\left(\Omega, L^2\left(0,\infty;\left(\mathbb{R}^d\right)^*\right)\right)$ *; aussi,* $Y^{\alpha,x}$ *est borné par* $\dfrac{M}{\alpha}$.

Théorème

Sous ces hypothèses, cette EDSR admet une unique solution $(Y^{\alpha,x}, Z^{\alpha,x})$*, telle que* $Y^{\alpha,x}$ *soit un processus continu borné et* $Z^{\alpha,x} \in L^2_{\mathcal{P},loc}\left(\Omega, L^2\left(0,\infty;\left(\mathbb{R}^d\right)^*\right)\right)$ *; aussi,* $Y^{\alpha,x}$ *est borné par* $\dfrac{M}{\alpha}$.

On pose $v^\alpha : x \mapsto Y_0^{\alpha,x}$.

Théorème

Sous ces hypothèses, cette EDSR admet une unique solution $(Y^{\alpha,x}, Z^{\alpha,x})$*, telle que* $Y^{\alpha,x}$ *soit un processus continu borné et* $Z^{\alpha,x} \in L^2_{\mathcal{P},loc}\left(\Omega, L^2\left(0,\infty; \left(\mathbb{R}^d\right)^*\right)\right)$ *; aussi,* $Y^{\alpha,x}$ *est borné par* $\frac{M}{\alpha}$.

On pose $v^\alpha : x \mapsto Y_0^{\alpha,x}$.

Théorème

On a $Y_t^{\alpha,x} = v^\alpha\left(X_t^x\right)$ $\mathbb{P}$*-ps pour tout* $t \geq 0$ *et la fonction* v^α *est bornée et globalement Lipschitz, avec dépendance de la constante de Lipschitz en* α.

Théorème

Sous ces hypothèses, cette EDSR admet une unique solution $(Y^{\alpha,x}, Z^{\alpha,x})$, *telle que* $Y^{\alpha,x}$ *soit un processus continu borné et* $Z^{\alpha,x} \in L^2_{\mathcal{P},loc}\left(\Omega, L^2\left(0,\infty;(\mathbb{R}^d)^*\right)\right)$ *; aussi,* $Y^{\alpha,x}$ *est borné par* $\dfrac{M}{\alpha}$.

On pose $v^\alpha : x \mapsto Y_0^{\alpha,x}$.

Théorème

On a $Y_t^{\alpha,x} = v^\alpha(X_t^x)$ $\mathbb{P}$*-ps pour tout* $t \geq 0$ *et la fonction* v^α *est à croissance quadratique et localement Lipschitz :*

$$\left|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')\right| \leq C\left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right),$$

$$\left|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')\right| \leq C\left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right)|x - x'|,$$

avec C *indépendante de* α.

Faisons tendre α vers 0

On pose $\overline{v}^{\alpha}(x) := v^{\alpha}(x) - v^{\alpha}(0)$. On a :

$$|\overline{v}^{\alpha}(x)| \leq C\left(1 + |x|^2\right) \text{ et } |\alpha v^{\alpha}(0)| \leq M.$$

Faisons tendre α vers 0

On pose $\overline{v}^\alpha(x) := v^\alpha(x) - v^\alpha(0)$. On a :

$$|\overline{v}^\alpha(x)| \leq C\left(1+|x|^2\right) \text{ et } |\alpha v^\alpha(0)| \leq M.$$

Quitte à faire une extraction diagonale : $\overline{v}^\alpha \underset{\alpha\longrightarrow 0}{\xrightarrow{\text{cvs}}} \overline{v}$ et $\alpha v^\alpha(0) \underset{\alpha\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \overline{\lambda}$.

Faisons tendre α vers 0

On pose $\overline{v}^{\alpha}(x) := v^{\alpha}(x) - v^{\alpha}(0)$. On a :

$$|\overline{v}^{\alpha}(x)| \leq C\left(1 + |x|^2\right) \text{ et } |\alpha v^{\alpha}(0)| \leq M.$$

Quitte à faire une extraction diagonale : $\overline{v}^{\alpha} \xrightarrow[\alpha \longrightarrow 0]{\text{cvs}} \overline{v}$ et $\alpha v^{\alpha}(0) \xrightarrow[\alpha \longrightarrow 0]{} \overline{\lambda}$.

Notant $\overline{Y}_t^{\alpha,x} = \overline{v}^{\alpha}\left(X_t^x\right)$:

$$\overline{Y}_t^{\alpha,x} = \overline{Y}_T^{\alpha,x} + \int_t^T \left[\psi\left(X_s^x, Z_s^{\alpha,x}\right) - \alpha \overline{Y}_s^{\alpha,x} + \alpha v^{\alpha}(0)\right] \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{\alpha,x} \,\mathrm{d}W_s.$$

Faisons tendre α vers 0

On pose $\overline{v}^{\alpha}(x) := v^{\alpha}(x) - v^{\alpha}(0)$. On a :

$$|\overline{v}^{\alpha}(x)| \leq C\left(1+|x|^2\right) \text{ et } |\alpha v^{\alpha}(0)| \leq M.$$

Quitte à faire une extraction diagonale : $\overline{v}^{\alpha} \underset{\alpha\to 0}{\xrightarrow{\text{cvs}}} \overline{v}$ et $\alpha v^{\alpha}(0) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \overline{\lambda}$.
Notant $\overline{Y}_t^{\alpha,x} = \overline{v}^{\alpha}\left(X_t^x\right)$:

$$\overline{Y}_t^{\alpha,x} = \overline{Y}_T^{\alpha,x} + \int_t^T \left[\psi\left(X_s^x, Z_s^{\alpha,x}\right) - \alpha \overline{Y}_s^{\alpha,x} + \alpha v^{\alpha}(0)\right] \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{\alpha,x}\, \mathrm{d}W_s.$$

$$\downarrow$$

$$\overline{Y}_t^x = \overline{Y}_T^x + \int_t^T \left[\psi\left(X_s^x, \overline{Z}_s^x\right) + \overline{\lambda}\right] \mathrm{d}s - \int_t^T \overline{Z}_s^x\, \mathrm{d}W_s.$$

On a fait tendre α vers 0

Théorème

Sous les hypothèses réalisées précédemment, l'EDSR "ergodique" :

$$Y_t = Y_T + \int_t^T \left[\psi\left(X_s^x, Z_s\right) - \lambda\right] ds - \int_t^T Z_s \, dW_s, \, 0 \leq t \leq T < \infty,$$

admet une unique solution (Y, Z, λ) telle que :

- *Y s'exprime comme une fonction continue de X^x, à croissance quadratique et nulle en 0 ;*
- *Z s'exprime comme une fonction mesurable de X^x ;*
- $\lambda \in \mathbb{R}$.

Application à la résolution d'équations Hamilton-Jacobi-Bellman

Générateur infinitésimal de l'EDS vérifiée par X :

$$\mathcal{L}f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{E}\left[f\left(X_t^x\right)\right] - f(x)}{t},$$

encore exprimé :

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\sigma(x)\sigma(x)^* \partial_{xx}^2 f(x)\right) + \langle Ax + \Gamma(x), f(x)\rangle.$$

Application à la résolution d'équations Hamilton-Jacobi-Bellman

Générateur infinitésimal de l'EDS vérifiée par X :

$$\mathcal{L}f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{E}\left[f\left(X_t^x\right)\right] - f(x)}{t},$$

encore exprimé :

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(x)\sigma(x)^* \partial_{xx}^2 f(x)\right) + \langle Ax + \Gamma(x), f(x)\rangle.$$

Théorème

Si $\left(v\left(X^x\right), \partial_x v\left(X^x\right)\sigma\left(X^x\right), \lambda\right)$ est solution de l'EDSR ergodique, alors (v, λ) est solution "mild" de l'EDP :

$$\mathcal{L}v(x) + \psi\left(x, \partial_x v(x)\sigma(x)\right) = \lambda.$$

On dispose de la réciproque.

Application à la résolution d'équations Hamilton-Jacobi-Bellman

Théorème

Si $(v(X^x), \partial_x v(X^x)\sigma(X^x), \lambda)$ *est solution de l'EDSR ergodique, alors* (v, λ) *est solution "mild" de l'EDP :*

$$\mathcal{L}v(x) + \psi(x, \partial_x v(x)\sigma(x)) = \lambda.$$

On dispose de la réciproque.

Définition (Solution "mild")

On dit que (v, λ) *est solution "mild" de l'EDP ci-dessus quand :*

- $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ *et* $\partial_x v$ *est à croissance polynomiale ;*
- $\forall 0 \leq t \leq T < \infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$v(x) = \mathbb{E}\left[v\left(X^x_{T-t}\right)\right] + \int_t^T \mathbb{E}\left[\psi\left(X^x_{s-t}, \partial_x v\left(X^x_{s-t}\right)\sigma\left(X^x_{s-t}\right)\right) - \lambda\right] ds.$$

Application au problème de contrôle optimal

Contrôle : processus progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.
Soient $R : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ et $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mesurables et telles que :

$$|R(u)| \leq c, \ |L(x,u)| \leq c \text{ et } |L(x,u) - L(x',u)| \leq c|x - x'|.$$

On pose $\rho_T^u = \exp\left(\int_0^T R(u_s) \,.\, \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^T |R(u_s)|^2 \,\mathrm{d}s\right)$ et $\mathbb{P}_T^u = \rho_T^u \mathbb{P}$.

On veut minimiser la fonction coût :

$$J(x,u) = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathbb{E}_T^u \left[\int_0^T L(X_s^u, u_s) \,\mathrm{d}s\right].$$

Application au problème de contrôle optimal

Contrôle : processus progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.
Soient $R : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ et $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mesurables et telles que :

$$|R(u)| \leq c, \, |L(x,u)| \leq c \text{ et } |L(x,u) - L(x',u)| \leq c|x - x'|.$$

On pose $\rho_T^u = \exp\left(\int_0^T R\left(u_s\right) . \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^T \left|R\left(u_s\right)\right|^2 \mathrm{d}s\right)$ et $\mathbb{P}_T^u = \rho_T^u \mathbb{P}$.

On veut minimiser la fonction coût :

$$J(x,u) = \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E}_T^u \left[\int_0^T L\left(X_s^u, u_s\right) \mathrm{d}s\right].$$

L'EDSR ergodique associée à $\psi(x,z) = \inf_{u \in \mathbb{R}^k} \{L(x,u) + z \, . \, R(u)\}$ admet une solution sous la forme $\left(\overline{v}\left(X_t^x\right), \overline{\zeta}\left(X_t^x\right), \overline{\lambda}\right)$.

Application au problème de contrôle optimal

Contrôle : processus progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.
Soient $R : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ et $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mesurables et telles que :

$$|R(u)| \leq c, \, |L(x,u)| \leq c \text{ et } |L(x,u) - L(x',u)| \leq c|x - x'|.$$

On pose $\rho_T^u = \exp\left(\int_0^T R(u_s) \, . \, \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^T |R(u_s)|^2 \, \mathrm{d}s\right)$ et $\mathbb{P}_T^u = \rho_T^u \mathbb{P}$.

On veut minimiser la fonction coût :

$$J(x,u) = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathbb{E}_T^u \left[\int_0^T L(X_s^u, u_s) \, \mathrm{d}s\right].$$

L'EDSR ergodique associée à $\psi(x,z) = \inf_{u\in\mathbb{R}^k} \{L(x,u) + z \, . \, R(u)\}$ admet une solution sous la forme $\left(\overline{v}(X_t^x), \overline{\zeta}(X_t^x), \overline{\lambda}\right)$.

Théorème

Pour tout contrôle u, on a $J(x,u) \geq \overline{\lambda}$.
Si $L(X_t^x, u_t) + \overline{\zeta}(X_t^x) \, . \, R(u_t) = \psi\left(X_t^x, \overline{\zeta}(X_t^x)\right)$ $\mathbb{P}$-p.s. et pour p.t. $t \geq 0$, alors $J(x,u) = \overline{\lambda}$.

.noitnetta ertov ruop icreM