Fascinants nombres de *Bernoulli*

Laura Gay - Florian Lemonnier

Université de Rennes 1 - ENS Ker Lann

19 avril 2013

Définition

Sommes de *Bernoulli*

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^p$$

Définition

Sommes de *Bernoulli*

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^p$$

$$S_1(n) = 0^1 + 1^1 + \ldots + (n-1)^1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Définition

Sommes de *Bernoulli*

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^p$$

$$S_1(n) = 0^1 + 1^1 + \ldots + (n-1)^1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$S_2(n) = 0^2 + 1^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

Définition

Sommes de *Bernoulli*

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^p$$

$$S_1(n) = 0^1 + 1^1 + \ldots + (n-1)^1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$S_2(n) = 0^2 + 1^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$S_3(n) = \frac{n(n-1)(2n-1)(3n-1)}{4!}\ ?$$

Calcul de $S_3(n)$ par le binôme de *Newton*

$$(n-1)^4 - (n-2)^4 \quad = \quad 4(n-1)^3 - 6(n-1)^2 + 4(n-1) - 1$$

Calcul de $S_3(n)$ par le binôme de *Newton*

$$\begin{aligned}(n-1)^4-(n-2)^4 &= 4(n-1)^3-6(n-1)^2+4(n-1)-1\\(n-2)^4-(n-3)^4 &= 4(n-2)^3-6(n-2)^2+4(n-2)-1\end{aligned}$$

Calcul de $S_3(n)$ par le binôme de *Newton*

$$\begin{aligned}
(n-1)^4-(n-2)^4 &= 4(n-1)^3-6(n-1)^2+4(n-1)-1\\
(n-2)^4-(n-3)^4 &= 4(n-2)^3-6(n-2)^2+4(n-2)-1\\
&\vdots\\
1^4-0^4 &= 4\times 1^3-6\times 1^2+4\times 1-1
\end{aligned}$$

Calcul de $S_3(n)$ par le binôme de *Newton*

$$
\begin{array}{rcl}
(n-1)^4-(n-2)^4 & = & 4(n-1)^3-6(n-1)^2+4(n-1)-1 \\
(n-2)^4-(n-3)^4 & = & 4(n-2)^3-6(n-2)^2+4(n-2)-1 \\
 & \vdots & \\
1^4-0^4 & = & 4\times 1^3-6\times 1^2+4\times 1-1 \\
\hline
(n-1)^4 & = & 4S_3(n)-6S_2(n)+4S_1(n)-(n-1)
\end{array}
$$

Calcul de $S_3(n)$ par le binôme de *Newton*

$$\begin{array}{rcl}
(n-1)^4-(n-2)^4 & = & 4(n-1)^3-6(n-1)^2+4(n-1)-1 \\
(n-2)^4-(n-3)^4 & = & 4(n-2)^3-6(n-2)^2+4(n-2)-1 \\
 & \vdots & \\
1^4-0^4 & = & 4\times 1^3-6\times 1^2+4\times 1-1 \\
\hline
(n-1)^4 & = & 4S_3(n)-6S_2(n)+4S_1(n)-(n-1)
\end{array}$$

Donc $S_3(n)=\dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$, et non $\dfrac{n(n-1)(2n-1)(3n-1)}{4!}$.

$$
\begin{array}{lcllllllll}
2S_1(n) & = & 1n^2 & -1n & & & & & \\
3S_2(n) & = & 1n^3 & -\frac{3}{2}n^2 & +\frac{1}{2}n & & & & \\
4S_3(n) & = & 1n^4 & -2n^3 & +1n^2 & +0n & & & \\
5S_4(n) & = & 1n^5 & -\frac{5}{2}n^4 & +\frac{5}{3}n^3 & +0n^2 & -\frac{1}{6}n & & \\
6S_5(n) & = & 1n^6 & -3n^5 & +\frac{5}{2}n^4 & +0n^3 & -\frac{1}{2}n^2 & +0n & \\
7S_6(n) & = & 1n^7 & -\frac{7}{2}n^6 & +\frac{7}{2}n^5 & +0n^4 & -\frac{7}{6}n^3 & +0n^2 & +\frac{1}{6}n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllllll}
2S_1(n) & = & 1n^2 & -1n & & & & & \\
3S_2(n) & = & 1n^3 & -\frac{3}{2}n^2 & +\frac{1}{2}n & & & & \\
4S_3(n) & = & 1n^4 & -2n^3 & +1n^2 & +0n & & & \\
5S_4(n) & = & 1n^5 & -\frac{5}{2}n^4 & +\frac{5}{3}n^3 & +0n^2 & -\frac{1}{6}n & & \\
6S_5(n) & = & 1n^6 & -3n^5 & +\frac{5}{2}n^4 & +0n^3 & -\frac{1}{2}n^2 & +0n & \\
7S_6(n) & = & 1n^7 & -\frac{7}{2}n^6 & +\frac{7}{2}n^5 & +0n^4 & -\frac{7}{6}n^3 & +0n^2 & +\frac{1}{6}n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
1 & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
2S_1(n) = & 1n^2 & -1n & & & & & \\
3S_2(n) = & 1n^3 & -\frac{3}{2}n^2 & +\frac{1}{2}n & & & & \\
4S_3(n) = & 1n^4 & -2n^3 & +1n^2 & +0n & & & \\
5S_4(n) = & 1n^5 & -\frac{5}{2}n^4 & +\frac{5}{3}n^3 & +0n^2 & -\frac{1}{6}n & & \\
6S_5(n) = & 1n^6 & -3n^5 & +\frac{5}{2}n^4 & +0n^3 & -\frac{1}{2}n^2 & +0n & \\
7S_6(n) = & 1n^7 & -\frac{7}{2}n^6 & +\frac{7}{2}n^5 & +0n^4 & -\frac{7}{6}n^3 & +0n^2 & +\frac{1}{6}n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1
\end{array}
\qquad \times \frac{-1}{2}
$$

$$
\begin{array}{rclllllll}
2S_1(n) & = & 1n^2 & -1n & & & & & \\
3S_2(n) & = & 1n^3 & -\frac{3}{2}n^2 & +\frac{1}{2}n & & & & \\
4S_3(n) & = & 1n^4 & -2n^3 & +1n^2 & +0n & & & \\
5S_4(n) & = & 1n^5 & -\frac{5}{2}n^4 & +\frac{5}{3}n^3 & +0n^2 & -\frac{1}{6}n & & \\
6S_5(n) & = & 1n^6 & -3n^5 & +\frac{5}{2}n^4 & +0n^3 & -\frac{1}{2}n^2 & +0n & \\
7S_6(n) & = & 1n^7 & -\frac{7}{2}n^6 & +\frac{7}{2}n^5 & +0n^4 & -\frac{7}{6}n^3 & +0n^2 & +\frac{1}{6}n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1
\end{array}
$$

$$\times \frac{-1}{2}$$

$$\times \frac{1}{6}$$

$$2S_1(n) = 1n^2 - 1n$$
$$3S_2(n) = 1n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$
$$4S_3(n) = 1n^4 - 2n^3 + 1n^2 + 0n$$
$$5S_4(n) = 1n^5 - \frac{5}{2}n^4 + \frac{5}{3}n^3 + 0n^2 - \frac{1}{6}n$$
$$6S_5(n) = 1n^6 - 3n^5 + \frac{5}{2}n^4 + 0n^3 - \frac{1}{2}n^2 + 0n$$
$$7S_6(n) = 1n^7 - \frac{7}{2}n^6 + \frac{7}{2}n^5 + 0n^4 - \frac{7}{6}n^3 + 0n^2 + \frac{1}{6}n$$

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

$\times \frac{-1}{2}$

$\times \frac{1}{6}$

$\times \frac{-1}{30}$

Les premiers nombres de *Bernoulli*

$$
\begin{aligned}
B_0 &= 1 \\
B_1 &= \frac{-1}{2} \\
B_2 &= \frac{1}{6} \\
B_3 &= 0 \\
B_4 &= \frac{-1}{30} \\
B_5 &= 0 \\
B_6 &= \frac{1}{42} \\
B_7 &= 0 \\
B_8 &= \frac{-1}{30} \\
B_9 &= 0 \\
B_{10} &= \frac{5}{66}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
B_{11} &= 0 \\
B_{12} &= \frac{-691}{2730} \\
B_{13} &= 0 \\
B_{14} &= \frac{7}{6} \\
B_{15} &= 0 \\
B_{16} &= \frac{-3617}{510} \\
B_{17} &= 0 \\
B_{18} &= \frac{43867}{798} \\
B_{19} &= 0 \\
B_{20} &= \frac{-174611}{330} \\
B_{21} &= 0
\end{aligned}
$$

Théorème

Existence et définition des nombres de Bernoulli

$\forall (p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} B_k \, n^{p+1-k}$$

Les nombres B_k sont indépendants de n et p.
La suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite des nombres de Bernoulli, dont les premiers termes sont $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{6}, 0 \ldots$

Théorème

Existence et définition des nombres de Bernoulli

$\forall (p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} B_k \, n^{p+1-k}$$

Les nombres B_k sont indépendants de n et p.

La suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite des nombres de Bernoulli, dont les premiers termes sont $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{6}, 0 \ldots$

La démonstration se fait par induction sur $(\mathbb{N}^*)^2$.

Théorème

Relations de récurrence entre les nombres de Bernoulli

$$\forall p \geq 1, \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} B_k = 0$$

Théorème

Relations de récurrence entre les nombres de Bernoulli

$$\forall p \geq 1, \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} B_k = 0$$

$$\forall p \geq 1, B_p = \frac{(-1)^p}{p+1} \left(p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p+1}{k} (-1)^{k+1} B_k \right).$$

Théorème

Relations de récurrence entre les nombres de Bernoulli

$$\forall p \geq 1, \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} B_k = 0$$

$$\forall p \geq 1, B_p = \frac{(-1)^p}{p+1} \left(p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p+1}{k} (-1)^{k+1} B_k \right).$$

Théorème

À partir de B_3, tous les nombres de Bernoulli de rang impair sont nuls.

$$B_0 = 1$$
$$-B_1 = \frac{1}{2}$$
$$B_2 = \frac{1}{2\cdot 3}$$
$$-B_4 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}$$
$$B_6 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 7}$$
$$-B_8 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}$$

$$B_{10} = \frac{5}{2\cdot 3\cdot 11}$$
$$-B_{12} = \frac{691}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13}$$
$$B_{14} = \frac{7}{2\cdot 3}$$
$$-B_{16} = \frac{3617}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 17}$$
$$B_{18} = \frac{43867}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 19}$$
$$-B_{20} = \frac{283\cdot 617}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 11}$$

$$B_0 = 1$$
$$-B_1 = \frac{1}{2}$$
$$B_2 = \frac{1}{2 \cdot 3}$$
$$-B_4 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$
$$B_6 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 7}$$
$$-B_8 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$B_{10} = \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 11}$$
$$-B_{12} = \frac{691}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13}$$
$$B_{14} = \frac{7}{2 \cdot 3}$$
$$-B_{16} = \frac{3617}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17}$$
$$B_{18} = \frac{43867}{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19}$$
$$-B_{20} = \frac{283 \cdot 617}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}$$

$$B_0 = 1$$
$$-B_1 = \frac{1}{2}$$
$$B_2 = \frac{1}{2 \cdot 3}$$
$$-B_4 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$
$$B_6 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 7}$$
$$-B_8 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$B_{10} = \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 11}$$
$$-B_{12} = \frac{691}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13}$$
$$B_{14} = \frac{7}{2 \cdot 3}$$
$$-B_{16} = \frac{3617}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17}$$
$$B_{18} = \frac{43867}{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19}$$
$$-B_{20} = \frac{283 \cdot 617}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}$$

$$B_0 = 1$$
$$-B_1 = \frac{1}{2}$$
$$B_2 = \frac{1}{2\cdot 3}$$
$$-B_4 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}$$
$$B_6 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 7}$$
$$-B_8 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}$$

$$B_{10} = \frac{5}{2\cdot 3\cdot 11}$$
$$-B_{12} = \frac{691}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13}$$
$$B_{14} = \frac{7}{2\cdot 3}$$
$$-B_{16} = \frac{3617}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 17}$$
$$B_{18} = \frac{43867}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 19}$$
$$-B_{20} = \frac{283\cdot 617}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 11}$$

$$B_0 = 1$$
$$-B_1 = \frac{1}{2}$$
$$B_2 = \frac{1}{2 \cdot 3}$$
$$-B_4 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$
$$B_6 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 7}$$
$$-B_8 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$B_{10} = \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 11}$$
$$-B_{12} = \frac{691}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13}$$
$$B_{14} = \frac{7}{2 \cdot 3}$$
$$-B_{16} = \frac{3617}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17}$$
$$B_{18} = \frac{43867}{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19}$$
$$-B_{20} = \frac{283 \cdot 617}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}$$

Conjecture :

Conjecture :

q premier divise les dénominateurs de B_{q-1}, $B_{2(q-1)}$, $B_{3(q-1)}$

Conjecture :
q premier divise les dénominateurs de B_{q-1}, $B_{2(q-1)}$, $B_{3(q-1)}$

. . . et seulement ceux-là !

Conjecture :
q premier divise les dénominateurs de B_{q-1}, $B_{2(q-1)}$, $B_{3(q-1)}$

. . . et seulement ceux-là !

Exemple

B_{10}

Conjecture :
q premier divise les dénominateurs de B_{q-1}, $B_{2(q-1)}$, $B_{3(q-1)}$

...et seulement ceux-là !

Exemple

B_{10}
Diviseurs de 10 +1 : 2, 3, 6, 11

Conjecture :

q premier divise les dénominateurs de B_{q-1}, $B_{2(q-1)}$, $B_{3(q-1)}$

. . . et seulement ceux-là !

Exemple

B_{10}

Diviseurs de 10 +1 : 2, 3, 6, 11

Nombres premiers de cette liste : 2, 3, 11.

Conjecture :
q premier divise les dénominateurs de B_{q-1}, $B_{2(q-1)}$, $B_{3(q-1)}$

. . . et seulement ceux-là !

Exemple

B_{10}
Diviseurs de 10 +1 : 2, 3, 6, 11
Nombres premiers de cette liste : 2, 3, 11.
Dénominateur de B_{10} : $2 \cdot 3 \cdot 11$

Théorème

Von Staudt-Clausen

La somme $B_p + \sum_{\substack{q \text{ premier}, \\ q-1 | p}} \frac{1}{q}$ *est un nombre entier.*

Idées pour la preuve

Définition

Un nombre rationnel est q-**entier** s'il ne contient pas q au dénominateur.

Idées pour la preuve

Définition

Un nombre rationnel est q-**entier** s'il ne contient pas q au dénominateur.

Définition

Dans l'anneau $\mathbb{Z}_q$: **Congruence modulo** q pour les rationnels

Soient $m, w, m', w' \in \mathbb{Z}$ tels que $\frac{m}{w}$ et $\frac{m'}{w'}$ irréductibles

Idées pour la preuve

Définition

Un nombre rationnel est q-**entier** s'il ne contient pas q au dénominateur.

Définition

Dans l'anneau $\mathbb{Z}_q$: **Congruence modulo** q pour les rationnels

Soient $m, w, m', w' \in \mathbb{Z}$ tels que $\frac{m}{w}$ et $\frac{m'}{w'}$ irréductibles

$$\frac{m}{w} \equiv \frac{m'}{w'} \; [q] \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{m}{w} = \frac{m'}{w'} + q\frac{m''}{w''}$$

Idées pour la preuve

Définition

Un nombre rationnel est q-**entier** s'il ne contient pas q au dénominateur.

Définition

Dans l'anneau $\mathbb{Z}_q$: **Congruence modulo** q pour les rationnels

Soient $m, w, m', w' \in \mathbb{Z}$ tels que $\dfrac{m}{w}$ et $\dfrac{m'}{w'}$ irréductibles

$$\frac{m}{w} \equiv \frac{m'}{w'} \; [q] \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{m}{w} = \frac{m'}{w'} + q\frac{m''}{w''}$$

où $m'', w'' \in \mathbb{Z}$ et $\dfrac{m''}{w''}$ est irréductible avec $q \nmid w''$.

Idées pour la preuve

Théorème

Soit $p \geq 2$ et q un nombre premier. On a les congruences suivantes :

Idées pour la preuve

Théorème

Soit $p \geq 2$ et q un nombre premier. On a les congruences suivantes :

$$\text{Si} \quad (q-1) \nmid p \quad \text{alors} \quad S_p(q) \equiv 0 \ [q]$$

Idées pour la preuve

Théorème

Soit $p \geq 2$ et q un nombre premier. On a les congruences suivantes :

$$\begin{array}{llll} Si & (q-1) \nmid p & alors & S_p(q) \equiv 0 \ [q] \\ Si & (q-1) \mid p & alors & S_p(q) \equiv -1 \ [q] \end{array}$$

Idées pour la preuve

Théorème

Soit $p \geq 2$ et q un nombre premier. On a les congruences suivantes :

$$\begin{array}{llll} \text{Si} & (q-1) \nmid p & \text{alors} & S_p(q) \equiv 0 \ [q] \\ \text{Si} & (q-1) \mid p & \text{alors} & S_p(q) \equiv -1 \ [q] \end{array}$$

Théorème

Soit $p \geq 2$ et q un nombre premier.

Idées pour la preuve

Théorème

Soit $p \geq 2$ et q un nombre premier. On a les congruences suivantes :

$$\begin{array}{llll} Si & (q-1) \nmid p & alors & S_p(q) \equiv 0 \ [q] \\ Si & (q-1) \mid p & alors & S_p(q) \equiv -1 \ [q] \end{array}$$

Théorème

Soit $p \geq 2$ et q un nombre premier.
Si $(q-1) \nmid p$, alors B_p est q-entier (et qB_p est également q-entier).

Idées pour la preuve

Théorème

Soit $p \geq 2$ et q un nombre premier. On a les congruences suivantes :

$$\begin{array}{llll} Si & (q-1) \nmid p & alors & S_p(q) \equiv 0 \ [q] \\ Si & (q-1) \mid p & alors & S_p(q) \equiv -1 \ [q] \end{array}$$

Théorème

Soit $p \geq 2$ et q un nombre premier.
Si $(q-1) \nmid p$, alors B_p est q-entier (et qB_p est également q-entier).
Si $(q-1) \mid p$, alors qB_p est q-entier et $qB_p \equiv -1 \ [q]$.

Théorème

Von Staudt-Clausen

La somme $B_p + \sum_{\substack{q \text{ premier}, \\ q-1 | p}} \frac{1}{q}$ *est un nombre entier.*

Théorème

Von Staudt-Clausen

La somme $B_p + \sum_{\substack{q \text{ premier}, \\ q-1 | p}} \frac{1}{q}$ *est un nombre entier.*

Cette quantité est q'-entière pour tout q' premier.

Théorème

Von Staudt-Clausen

La somme $B_p + \displaystyle\sum_{\substack{q \text{ premier}, \\ q-1|p}} \frac{1}{q}$ *est un nombre entier.*

Cette quantité est q'-entière pour tout q' premier.
Si $(q'-1) \nmid p$, B_p est q'-entier et tous les termes de la somme sont q'-entiers.

Théorème

Von Staudt-Clausen

La somme $B_p + \sum_{\substack{q \text{ premier}, \\ q-1 | p}} \frac{1}{q}$ *est un nombre entier.*

Cette quantité est q'-entière pour tout q' premier.

Si $(q'-1) \nmid p$, B_p est q'-entier et tous les termes de la somme sont q'-entiers.

Si $(q'-1) \mid p$, à part $\frac{1}{q'}$, tous les termes de la somme sont q'-entiers.

Théorème

Von Staudt-Clausen

La somme $B_p + \sum_{\substack{q \text{ premier}, \\ q-1 | p}} \frac{1}{q}$ *est un nombre entier.*

Cette quantité est q'-entière pour tout q' premier.

Si $(q'-1) \nmid p$, B_p est q'-entier et tous les termes de la somme sont q'-entiers.

Si $(q'-1) \mid p$, à part $\frac{1}{q'}$, tous les termes de la somme sont q'-entiers.

Or, $q' B_p \equiv -1\,[q']$, *ie* $B_p = \frac{-1}{q'} + \frac{m}{w}$ où $q' \nmid w$ $\left(\text{donc } \frac{m}{w}\ q'\text{-entier}\right)$.

Théorème

Von Staudt-Clausen

La somme $B_p + \sum_{\substack{q \text{ premier}, \\ q-1|p}} \frac{1}{q}$ *est un nombre entier.*

Cette quantité est q'-entière pour tout q' premier.

Si $(q'-1) \nmid p$, B_p est q'-entier et tous les termes de la somme sont q'-entiers.

Si $(q'-1) \mid p$, à part $\frac{1}{q'}$, tous les termes de la somme sont q'-entiers.

Or, $q'B_p \equiv -1\,[q']$, *ie* $B_p = \frac{-1}{q'} + \frac{m}{w}$ où $q' \nmid w$ $\left(\text{donc } \frac{m}{w}\ q'\text{-entier}\right)$.

Donc $B_p + \frac{1}{q'} = \frac{m}{w}$ est q'-entier.

Théorème

Von Staudt-Clausen

La somme $B_p + \sum_{\substack{q \text{ premier}, \\ q-1|p}} \frac{1}{q}$ *est un nombre entier.*

Cette quantité est q'-entière pour tout q' premier.

Si $(q'-1) \nmid p$, B_p est q'-entier et tous les termes de la somme sont q'-entiers.

Si $(q'-1) \mid p$, à part $\frac{1}{q'}$, tous les termes de la somme sont q'-entiers.

Or, $q'B_p \equiv -1\,[q']$, *ie* $B_p = \frac{-1}{q'} + \frac{m}{w}$ où $q' \nmid w$ $\left(\text{donc } \dfrac{m}{w}\ q'\text{-entier}\right)$.

Donc $B_p + \frac{1}{q'} = \frac{m}{w}$ est q'-entier.

$B_p + \sum_{\substack{q \text{ premier}, \\ q-1|p}} \frac{1}{q}$ est donc q'-entière pour tout q' premier.

Théorème

Fonction génératrice

$\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!}x^n$ *converge vers* $g : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$

Théorème

Fonction génératrice

$\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!}x^n$ *converge vers* $g : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$

Rayon de convergence : $R > 0$.

Idée de preuve

Soit $x \in]-R, R[$. On a :

$$(e^x - 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Idée de preuve

Soit $x \in]-R, R[$. On a :

$$(e^x - 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Regardons $\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k$:

Idée de preuve

Soit $x \in]-R, R[$. On a :

$$(e^x - 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Regardons $\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k$: pour $m = 0$, $\sum_{k=0}^{0} \binom{1}{k} B_k = B_0 = 1$

Idée de preuve

Soit $x \in]-R, R[$. On a :

$$(e^x - 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Regardons $\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k$: pour $m = 0$, $\sum_{k=0}^{0} \binom{1}{k} B_k = B_0 = 1$

pour $m \neq 0$, $\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k = 0.$

Idée de preuve

Soit $x \in]-R, R[$. On a :

$$(e^x - 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Regardons $\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k$: pour $m = 0$, $\sum_{k=0}^{0} \binom{1}{k} B_k = B_0 = 1$

pour $m \neq 0$, $\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k = 0.$

Donc $(e^x - 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\right) = x + 0 = x.$

Idée de preuve

Soit $x \in]-R, R[$. On a :

$$(e^x - 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Regardons $\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k$: pour $m = 0$, $\sum_{k=0}^{0} \binom{1}{k} B_k = B_0 = 1$

pour $m \neq 0$, $\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k = 0.$

Donc $(e^x - 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\right) = x + 0 = x.$

Donc sur $]-R, R[$, $g(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$

Théorème

Les polynômes de Bernoulli

Il existe une unique suite de polynômes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{R}[X]$ *tq :*

$$\begin{cases} A_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ A_n' = nA_{n-1} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 A_n(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases}.$$

Donnons les premiers polynômes de *Bernoulli* :

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = X - \frac{1}{2}$$

$$A_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$$

$$A_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$$

$$A_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}$$

$$A_5 = X^5 - \frac{5}{2}X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{6}X$$

$$A_6 = X^6 - 3X^5 + \frac{5}{2}X^4 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{42}$$

$$A_7 = X^7 - \frac{7}{2}X^6 + \frac{7}{2}X^5 - \frac{7}{6}X^3 + \frac{1}{6}X$$

Donnons les premiers polynômes de *Bernoulli* :

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = X - \frac{1}{2}$$

$$A_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$$

$$A_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 0$$

$$A_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}$$

$$A_5 = X^5 - \frac{5}{2}X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{6}X + 0$$

$$A_6 = X^6 - 3X^5 + \frac{5}{2}X^4 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{42}$$

$$A_7 = X^7 - \frac{7}{2}X^6 + \frac{7}{2}X^5 - \frac{7}{6}X^3 + \frac{1}{6}X + 0$$

On a : $B_p = A_p(0)$

Définition

La fonction ζ

$$\forall s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\},\ \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Définition

La fonction ζ

$$\forall s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\},\ \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Théorème

Lien entre $\zeta(2q)$ et B_{2q}

$$\forall q \geq 1 \ : \ \zeta(2q) = \frac{(2\pi)^{2q}}{(-1)^{q-1} \times 2 \times (2q)!} B_{2q}$$

Définition

La fonction ζ

$$\forall s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\},\ \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Théorème

Lien entre $\zeta(2q)$ et B_{2q}

$$\forall q \geq 1 \ : \ \zeta(2q) = \frac{(2\pi)^{2q}}{(-1)^{q-1} \times 2 \times (2q)!} B_{2q}$$

La démonstration utilise les séries de *Fourier*.

Ce qu'on déduit de $\zeta(2q) = \frac{(2\pi)^{2q}}{(-1)^{q-1}\times 2\times(2q)!}B_{2q}$

Lemme

Signe des nombres de Bernoulli de rang pair

Si q est impair, alors B_{2q} est positif.

Au contraire, si q est pair (et $q \neq 0$), alors B_{2q} est négatif.

Ce qu'on déduit de $\zeta(2q) = \dfrac{(2\pi)^{2q}}{(-1)^{q-1}\times 2\times(2q)!}B_{2q}$

Lemme

Signe des nombres de Bernoulli de rang pair

Si q est impair, alors B_{2q} est positif.

Au contraire, si q est pair (et $q \neq 0$), alors B_{2q} est négatif.

Théorème

Équivalent en l'infini de $|B_{2q}|$

$$|B_{2q}| \sim 4\sqrt{\pi q}\left(\frac{q}{\pi e}\right)^{2q}$$

Théorème

Rayon de convergence de la série génératrice

$g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$ a 2π pour rayon de convergence.

Théorème

Rayon de convergence de la série génératrice

$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$ a 2π pour rayon de convergence.

On le démontre en utilisant le critère de *d'Alembert*.

Développement en série entière de tangente

Rappel : $g(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$

Développement en série entière de tangente

Rappel : $g(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{B_n}{n!} x^n.$

Lemme

$$\tanh(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2^{4n} - 2^{2n}) B_{2n} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \left(rayon\ :\ \frac{\pi}{2} \right)$$

Développement en série entière de tangente

Rappel : $g(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$

Lemme

$$\tanh(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2^{4n} - 2^{2n}) B_{2n} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \left(\textit{rayon} : \frac{\pi}{2} \right)$$

On utilise la relation $x \tanh(x) = g(4x) - g(2x) + x$.

Développement en série entière de tangente

Rappel : $g(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$.

Lemme

$$\tanh(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2^{4n} - 2^{2n}) B_{2n} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \left(\textit{rayon : } \frac{\pi}{2}\right)$$

On utilise la relation $x \tanh(x) = g(4x) - g(2x) + x$.

Théorème

$$\tan(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2^{4n} - 2^{2n}) |B_{2n}| \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \left(\textit{rayon : } \frac{\pi}{2}\right)$$

Développement en série entière de tangente

Rappel : $g(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$.

Lemme

$$\tanh(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2^{4n} - 2^{2n}) B_{2n} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \left(\textit{rayon : } \frac{\pi}{2} \right)$$

On utilise la relation $x \tanh(x) = g(4x) - g(2x) + x$.

Théorème

$$\tan(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2^{4n} - 2^{2n}) |B_{2n}| \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \left(\textit{rayon : } \frac{\pi}{2} \right)$$

Poser $x = iz$

D'autres développements en série ...

Lemme

$$\frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (2^{2n} - 2) B_{2n} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}, \textit{ pour } 0 < |x| < \pi$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (2^{2n} - 2) |B_{2n}| \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}, \textit{ pour } 0 < |x| < \pi$$

$$\ldots$$

Les nombres de *Bernoulli* apparaissent :

Les nombres de *Bernoulli* apparaissent :

- dans des sommes de puissances d'entiers

Les nombres de *Bernoulli* apparaissent :

- dans des sommes de puissances d'entiers
- dans une famille de polynômes

Les nombres de *Bernoulli* apparaissent :

- dans des sommes de puissances d'entiers
- dans une famille de polynômes
- dans la fonction ζ de *Riemann*

Les nombres de *Bernoulli* apparaissent :

- dans des sommes de puissances d'entiers
- dans une famille de polynômes
- dans la fonction ζ de *Riemann*
- dans le développement en série entière de fonctions faisant intervenir des exponentielles, des fonctions trigonométriques . . .

Les nombres de *Bernoulli* apparaissent :

- dans des sommes de puissances d'entiers
- dans une famille de polynômes
- dans la fonction ζ de *Riemann*
- dans le développement en série entière de fonctions faisant intervenir des exponentielles, des fonctions trigonométriques . . .

Ils sont aussi au coeur de conjectures, comme celle d'*Agoh-Giuga* :

Un entier p serait premier, si, et seulement si, $pB_{p-1} \equiv -1\ [p]$.