Étude d'EDS rétrogrades ergodiques et applications

Florian Lemonnier

Stage pour le Master 2

Encadré par Ying Hu

28 juin 2016

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probabilité complet, W un m.b. d-dimensionnel de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$.
On considère l'EDS :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{d}X_t = (AX_t + \Gamma(X_t))\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\,\mathrm{d}W_t, \quad t \in \mathbb{R}_+ \\ X_0 = x \end{array} \right.$$

où :

- $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est strictement monotone, *ie* :

$$\exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \ {}^t x A x \leq -\eta |x|^2;$$

- $\Gamma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est bornée mesurable ;
- $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ est mesurable, globalement lipschitzienne, bornée, et $x \mapsto \sigma(x)^{-1}$ est bornée.

Théorème (Résolution forte)

On suppose que Γ est globalement lipschitzienne.
Alors il existe un unique processus X^x solution forte de l'EDS.
De plus, pour tout $p \in [2, +\infty[$, pour tout $T > 0$,
$X^x \in L^p\left(\Omega, \mathcal{C}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)\right)$ *et*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0,T]} |X_t^x|^p\right] \leq C\left(1 + |x|^p\right),$$

où C ne dépend que de p et $\|\Gamma\|_\infty$.

Théorème (Résolution forte)

On suppose que Γ est globalement lipschitzienne.
Alors il existe un unique processus X^x solution forte de l'EDS.
De plus, pour tout $p \in [2, +\infty[$, pour tout $T > 0$,
$X^x \in L^p\left(\Omega, \mathcal{C}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)\right)$ *et*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t^x|^p\right] \leq C\left(1 + |x|^p\right),$$

où C ne dépend que de p et $\|\Gamma\|_\infty$.

Démonstration : (pour l'existence)
On utilise une méthode de point fixe avec l'application

$$X \mapsto \left(t \mapsto \mathrm{e}^{tA}x + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A}\Gamma(X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A}\sigma(X_s)\,\mathrm{d}W_s\right).$$

Théorème (Résolution faible)

On suppose seulement que Γ est bornée mesurable.

Alors il existe un espace probabilisé filtré $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}}, \left(\widetilde{\mathcal{F}}_t\right)_{t\geq 0}\right)$, un $\widetilde{\mathbb{P}}$-m.b. $\widetilde{W}$ et un processus $\widetilde{X}^x$ qui soit solution de l'EDS sur cet espace muni de son m.b.

Une telle solution est unique en loi.

On garde la majoration

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\widetilde{X}_t^x\right|^p\right] \leq C\left(1+|x|^p\right),$$

où C ne dépend que de p et $\|\Gamma\|_\infty$.

Démonstration :
Par Girsanov, $\widetilde{W}_t := W_t + \int_0^t \sigma(X_s)^{-1} \Gamma(X_s) \,\mathrm{d}s$ est un m.b. sous une loi $\widetilde{\mathbb{P}}$.
Sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{\mathbb{P}}, (\mathcal{F}_t)\right)$ l'équation s'écrit :

$$\mathrm{d}X_t = AX_t \,\mathrm{d}t + \sigma(X_t) \,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.$$

Cette équation admet une unique solution forte.

Théorème (Dépendance à la condition initiale)

Quand on suppose Γ *globalement lipschitzienne,*
$\exists c, \nu > 0, \forall \phi$ *bornée,* $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\left|\mathbb{E}\left[\phi\left(X_t^x\right)\right] - \mathbb{E}\left[\phi\left(X_t^y\right)\right]\right| \leq c\left(1 + |x|^2 + |y|^2\right) e^{-\nu t} \|\phi\|_\infty,$$

où c *et* ν *ne dépendent de* Γ *que via* $\|\Gamma\|_\infty$.

Théorème (Dépendance à la condition initiale)

Quand on suppose Γ globalement lipschitzienne,
$\exists c, \nu > 0$, $\forall \phi$ *bornée*, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\left|\mathbb{E}\left[\phi\left(X_t^x\right)\right] - \mathbb{E}\left[\phi\left(X_t^y\right)\right]\right| \leq c\left(1 + |x|^2 + |y|^2\right) e^{-\nu t}\|\phi\|_\infty,$$

où c et ν ne dépendent de Γ que via $\|\Gamma\|_\infty$.
Ce résultat s'étend au cas où Γ est une fonction bornée, mesurable et limite simple d'une suite de fonctions globalement lipschitziennes et uniformément bornées.

Démonstration :

- $\mathbb{E}\left[|X_t^x|^2\right] \leq \mathrm{e}^{-\eta t}|x|^2 + \kappa_1$;

Démonstration :

- $\mathbb{E}\left[|X_t^x|^2\right] \leq \mathrm{e}^{-\eta t}|x|^2 + \kappa_1$;
- on pose τ le t.a. "les trajectoires X^x et X^y sont restées dans une boule $\mathcal{B}_R$ entre les temps $(k-1)T$ et $kT = \tau$" et on montre que $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\nu\tau}\right] \leq \kappa_2\left(1+|x|^2+|y|^2\right)$ (où T et R sont convenablement fixés et ν suffisamment petit) ;

Démonstration :

- $\mathbb{E}\left[|X_t^x|^2\right] \leq e^{-\eta t}|x|^2 + \kappa_1$;
- on pose τ le t.a. "les trajectoires X^x et X^y sont restées dans une boule $\mathcal{B}_R$ entre les temps $(k-1)T$ et $kT = \tau$" et on montre que $\mathbb{E}\left[e^{\nu\tau}\right] \leq \kappa_2\left(1 + |x|^2 + |y|^2\right)$ (où T et R sont convenablement fixés et ν suffisamment petit) ;
- on considère une EDS auxiliaire

$$\mathrm{d}\widehat{X}_t = \widehat{b}\left(\widehat{X}_t\right)\,\mathrm{d}t + \widehat{\sigma}\left(\widehat{X}_t\right)\,\mathrm{d}W_t,$$

où $\widehat{b} \equiv A + \Gamma$ et $\widehat{\sigma} \equiv \sigma$ sur $\mathcal{B}_R$, $\widehat{b} \equiv \widehat{\sigma} \equiv 0$ hors de $\mathcal{B}_{R+1}$ et où $\widehat{b}$ et $\widehat{\sigma}$ sont globalement lipschitziennes ;

Démonstration :

- $\mathbb{E}\left[|X_t^x|^2\right] \leq \mathrm{e}^{-\eta t}|x|^2 + \kappa_1$;
- on pose τ le t.a. “les trajectoires X^x et X^y sont restées dans une boule $\mathcal{B}_R$ entre les temps $(k-1)T$ et $kT = \tau$” et on montre que $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\nu\tau}\right] \leq \kappa_2 \left(1 + |x|^2 + |y|^2\right)$ (où T et R sont convenablement fixés et ν suffisamment petit) ;
- on considère une EDS auxiliaire

$$\mathrm{d}\widehat{X}_t = \widehat{b}\left(\widehat{X}_t\right)\,\mathrm{d}t + \widehat{\sigma}\left(\widehat{X}_t\right)\,\mathrm{d}W_t,$$

où $\widehat{b} \equiv A + \Gamma$ et $\widehat{\sigma} \equiv \sigma$ sur $\mathcal{B}_R$, $\widehat{b} \equiv \widehat{\sigma} \equiv 0$ hors de $\mathcal{B}_{R+1}$ et où $\widehat{b}$ et $\widehat{\sigma}$ sont globalement lipschitziennes ;
par un lemme technique, on montre l'existence d'un couplage $\left(\widehat{V}_T^{1,x,y}, \widehat{V}_T^{2,x,y}\right)$ des lois $\mathcal{L}\left(\widehat{X}_T^x\right)$ et $\mathcal{L}\left(\widehat{X}_T^y\right)$, tel que :

$$\mathbb{P}\left(\widehat{V}_T^{1,x,y} = \widehat{V}_T^{2,x,y}\right) \geq \kappa_3;$$

Démonstration :

- on considère une EDS auxiliaire
$$d\widehat{X}_t = \widehat{b}\left(\widehat{X}_t\right) dt + \widehat{\sigma}\left(\widehat{X}_t\right) dW_t,$$
où $\widehat{b} \equiv A + \Gamma$ et $\widehat{\sigma} \equiv \sigma$ sur $\mathcal{B}_R$, $\widehat{b} \equiv \widehat{\sigma} \equiv 0$ hors de $\mathcal{B}_{R+1}$ et où $\widehat{b}$ et $\widehat{\sigma}$ sont globalement lipschitziennes ;
par un lemme technique, on montre l'existence d'un couplage $\left(\widehat{V}_T^{1,x,y}, \widehat{V}_T^{2,x,y}\right)$ des lois $\mathcal{L}\left(\widehat{X}_T^x\right)$ et $\mathcal{L}\left(\widehat{X}_T^y\right)$, tel que :
$$\mathbb{P}\left(\widehat{V}_T^{1,x,y} = \widehat{V}_T^{2,x,y}\right) \geq \kappa_3;$$
- on construit un couplage issu de n'importe quelles conditions initiales pour l'EDS ;
pour $t \in [0, T]$, $\left(V_t^{1,x,x}, V_t^{2,x,x}\right) = (X_t^x, X_t^x)$ et $\left(V_t^{1,x,y}, V_t^{2,x,y}\right) = \left(X_t^x, \overline{X}_t^y\right)$ (pour $x \neq y$, où $\overline{X}^y$ est solution de l'EDS pour un m.b. $\overline{W}$ indépendant de W) ;

Démonstration :

- on construit un couplage issu de n'importe quelles conditions initiales pour l'EDS ;
  pour $t \in [0, T]$, $\left(V_t^{1,x,x}, V_t^{2,x,x}\right) = (X_t^x, X_t^x)$ et $\left(V_t^{1,x,y}, V_t^{2,x,y}\right) = \left(X_t^x, \overline{X}_t^y\right)$ (pour $x \neq y$, où $\overline{X}^y$ est solution de l'EDS pour un m.b. $\overline{W}$ indépendant de W) ;
  par récurrence,
  $\left(V_{nT+t}^{1,x,y}, V_{nT+t}^{2,x,y}\right) = \left(V_t^{1,V_{nT}^{1,x,y},V_{nT}^{2,x,y}}, V_t^{2,V_{nT}^{1,x,y},V_{nT}^{2,x,y}}\right)$;

Démonstration :

- on construit un couplage issu de n'importe quelles conditions initiales pour l'EDS ;
  pour $t \in [0, T]$, $\left(V_t^{1,x,x}, V_t^{2,x,x}\right) = (X_t^x, X_t^x)$ et $\left(V_t^{1,x,y}, V_t^{2,x,y}\right) = \left(X_t^x, \overline{X}_t^y\right)$ (pour $x \neq y$, où $\overline{X}^y$ est solution de l'EDS pour un m.b. $\overline{W}$ indépendant de W) ;
  par récurrence,
  $\left(V_{nT+t}^{1,x,y}, V_{nT+t}^{2,x,y}\right) = \left(V_t^{1,V_{nT}^{1,x,y},V_{nT}^{2,x,y}}, V_t^{2,V_{nT}^{1,x,y},V_{nT}^{2,x,y}}\right)$;
- on pose L_m les t.a. "pour la $m^{\text{ème}}$ fois, les trajectoires du couplage sont restées dans une boule $\mathcal{B}_R$ entre $(L_m - 1)\,T$ et $L_m T$" et on a

$$\mathbb{E}\left[e^{\nu L_m T}\right] \leq \kappa_2^m \left(1 + 2R^2\right)^{m-1} \left(1 + |x|^2 + |y|^2\right) ;$$

Démonstration :

- on pose L_m les t.a. “pour la $m^{\text{ème}}$ fois, les trajectoires du couplage sont restées dans une boule $\mathcal{B}_R$ entre $(L_m - 1)\,T$ et $L_m T$” et on a

$$\mathbb{E}\left[e^{\nu L_m T}\right] \leq \kappa_2^m \left(1 + 2R^2\right)^{m-1} \left(1 + |x|^2 + |y|^2\right);$$

- on pose $m_0 = \inf\left\{ m \middle| V_{L_m T}^{1,x,y} = V_{L_m T}^{2,x,y} \right\}$ et on montre que $\mathbb{P}\left(m_0 > m\right) \leq \left(1 - \kappa_3\right)^m$

Démonstration :

- on pose L_m les t.a. "pour la $m^{\text{ème}}$ fois, les trajectoires du couplage sont restées dans une boule $\mathcal{B}_R$ entre $(L_m - 1)T$ et $L_m T$" et on a

$$\mathbb{E}\left[e^{\nu L_m T}\right] \leq \kappa_2^m \left(1 + 2R^2\right)^{m-1} \left(1 + |x|^2 + |y|^2\right);$$

- on pose $m_0 = \inf\left\{m \middle| V^{1,x,y}_{L_m T} = V^{2,x,y}_{L_m T}\right\}$ et on montre que $\mathbb{P}\left(m_0 > m\right) \leq \left(1 - \kappa_3\right)^m$
- $L_{m_0} T$ admet un moment exponentiel et le premier instant où le couplage réussit est inférieur à $\left(L_{m_0} + 1\right) T$; par Markov :

$$\mathbb{P}\left(V^{1,x,y}_{kT} \neq V^{2,x,y}_{kT}\right) \leq \mathbb{E}\left[e^{\nu L_{m_0} T}\right] e^{-\nu(k-1)T};$$

Démonstration :

- on pose $m_0 = \inf\left\{m \middle| V^{1,x,y}_{L_m T} = V^{2,x,y}_{L_m T}\right\}$ et on montre que $\mathbb{P}\left(m_0 > m\right) \leq \left(1-\kappa_3\right)^m$
- $L_{m_0} T$ admet un moment exponentiel et le premier instant où le couplage réussit est inférieur à $\left(L_{m_0}+1\right) T$; par Markov :

$$\mathbb{P}\left(V^{1,x,y}_{kT} \neq V^{2,x,y}_{kT}\right) \leq \mathbb{E}\left[e^{\nu L_{m_0} T}\right] e^{-\nu(k-1)T};$$

- $$\left|\mathbb{E}\left[\phi\left(X^x_t\right)\right] - \mathbb{E}\left[\phi\left(X^y_t\right)\right]\right| = \left|\mathbb{E}\left[\phi\left(V^{1,x,y}_t\right)\right] - \mathbb{E}\left[\phi\left(V^{2,x,y}_t\right)\right]\right| \leq 2\|\phi\|_\infty \mathbb{P}\left(V^{1,x,y}_t \neq V^{2,x,y}_t\right)$$

On considère l'EDSR ergodique :

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T [\psi(X_s^x, Z_s^x) - \lambda] \, \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^x \, . \, \mathrm{d}W_s$$

où :

- $0 \leq t \leq T < \infty$;
- les inconnues sont les processus Y^x et Z^x à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^d$ et le réel λ ;
- ψ est continue, mesurable ; $\psi(\bullet, 0)$ est bornée et $|\psi(x,z) - \psi(x,z')| \leq M|z - z'|$ (avec M indépendant de x).

Aussi, on suppose que la fonction Γ de l'EDS vérifiée par X^x est maintenant globalement Lipschitzienne et de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour la résolution, on se ramène à une EDSR auxiliaire :

$$Y_t^{x,\alpha} = Y_T^{x,\alpha} + \int_t^T \left[\psi\left(X_s^x, Z_s^{x,\alpha}\right) - \alpha Y_s^{x,\alpha}\right] \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{x,\alpha} . \mathrm{d}W_s.$$

Théorème

Cette EDSR admet une unique solution $\left(Y^{x,\alpha}, Z^{x,\alpha}\right)$, où :

- $Y^{x,\alpha}$ *est un processus borné et continu ;*
- $Z^{x,\alpha} \in L^2_{\mathcal{P}}\left(\Omega, L^2\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)\right)$ *pour tout* $T > 0$ *;*
- $Y_t^{x,\alpha}$ *est borné p.s. par* $\frac{M}{\alpha}$*, où* M *est indépendant de* t *et* x*.*

Pour la résolution, on se ramène à une EDSR auxiliaire :

$$Y_t^{x,\alpha} = Y_T^{x,\alpha} + \int_t^T \left[\psi\left(X_s^x, Z_s^{x,\alpha}\right) - \alpha Y_s^{x,\alpha}\right] \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{x,\alpha} . \mathrm{d}W_s.$$

Théorème

Cette EDSR admet une unique solution $\left(Y^{x,\alpha}, Z^{x,\alpha}\right)$*, où :*

- $Y^{x,\alpha}$ *est un processus borné et continu ;*
- $Z^{x,\alpha} \in L^2_{\mathcal{P}}\left(\Omega, L^2\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)\right)$ *pour tout* $T > 0$ *;*
- $Y_t^{x,\alpha}$ *est borné p.s. par* $\frac{M}{\alpha}$*, où* M *est indépendant de* t *et* x*.*

Si on pose $v^\alpha : x \mapsto Y_0^{x,\alpha}$*, alors* v^α *est* $\mathcal{C}^1$ *et* $Y_t^{x,\alpha} = v^\alpha\left(X_t^x\right)$*,*
$Z_t^{x,\alpha} = \nabla v^\alpha\left(X_t^x\right)\sigma\left(X_t^x\right)$*.*

Pour la résolution, on se ramène à une EDSR auxiliaire :

$$Y_t^{x,\alpha} = Y_T^{x,\alpha} + \int_t^T \left[\psi\left(X_s^x, Z_s^{x,\alpha}\right) - \alpha Y_s^{x,\alpha}\right] \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{x,\alpha} . \mathrm{d}W_s.$$

Théorème

Cette EDSR admet une unique solution $\left(Y^{x,\alpha}, Z^{x,\alpha}\right)$, où :

- *$Y^{x,\alpha}$ est un processus borné et continu ;*
- *$Z^{x,\alpha} \in L^2_{\mathcal{P}}\left(\Omega, L^2\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)\right)$ pour tout $T > 0$;*
- *$Y_t^{x,\alpha}$ est borné p.s. par $\frac{M}{\alpha}$, où M est indépendant de t et x.*

Si on pose $v^\alpha : x \mapsto Y_0^{x,\alpha}$, alors v^α est $\mathcal{C}^1$ et $Y_t^{x,\alpha} = v^\alpha\left(X_t^x\right)$, $Z_t^{x,\alpha} = \nabla v^\alpha\left(X_t^x\right)\sigma\left(X_t^x\right)$.

On a : $|v^\alpha(x) - v^\alpha(y)| \leq c\left(1 + |x|^2 + |y|^2\right)$ et $|\nabla v^\alpha(x)| \leq c\left(1 + |x|^2\right)$, avec c qui ne dépend pas de α.

On pose $\overline{v}^{\alpha}(x) = v^{\alpha}(x) - v^{\alpha}(0)$; on a $|\overline{v}^{\alpha}(x)| \leq c\left(1 + |x|^2\right)$ et $|\alpha v^{\alpha}(0)| \leq M$.

On pose $\overline{v}^\alpha(x) = v^\alpha(x) - v^\alpha(0)$; on a $|\overline{v}^\alpha(x)| \leq c\left(1 + |x|^2\right)$ et $|\alpha v^\alpha(0)| \leq M$.
Extraction diagonale : pour $x \in D$, dénombrable et dense,

$$\overline{v}^{\alpha_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{v}(x) \text{ et } \alpha_n v^{\alpha_n}(0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{\lambda}.$$

On pose $\overline{v}^{\alpha}(x) = v^{\alpha}(x) - v^{\alpha}(0)$; on a $|\overline{v}^{\alpha}(x)| \leq c\left(1+|x|^2\right)$ et $|\alpha v^{\alpha}(0)| \leq M$.
Extraction diagonale : pour $x \in D$, dénombrable et dense,

$$\overline{v}^{\alpha_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{v}(x) \text{ et } \alpha_n v^{\alpha_n}(0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{\lambda}.$$

$\overline{v}$ s'étend en une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$, qui vérifie

$$|\overline{v}(x) - \overline{v}(y)| \leq c\left(1+|x|^2+|y|^2\right)|x-y|.$$

On pose $\overline{v}^{\alpha}(x) = v^{\alpha}(x) - v^{\alpha}(0)$; on a $|\overline{v}^{\alpha}(x)| \leq c\left(1 + |x|^2\right)$ et $|\alpha v^{\alpha}(0)| \leq M$.

Extraction diagonale : pour $x \in D$, dénombrable et dense,

$$\overline{v}^{\alpha_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{v}(x) \text{ et } \alpha_n v^{\alpha_n}(0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{\lambda}.$$

$\overline{v}$ s'étend en une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$, qui vérifie

$$|\overline{v}(x) - \overline{v}(y)| \leq c\left(1 + |x|^2 + |y|^2\right)|x - y|.$$

Théorème

Il existe une fonction $\overline{v}$ localement lipschitzienne et nulle en 0, un processus $\overline{Z}^x$ de carré intégrable et un réel $\overline{\lambda}$ tels qu'en posant $\overline{Y}^x_t = \overline{v}\left(X^x_t\right)$, l'EDSRE admette une solution $\left(\overline{Y}^x, \overline{Z}^x, \overline{\lambda}\right)$.

Si $\overline{v}$ est $\mathcal{C}^1$, alors $\overline{Z}^x_t = \nabla \overline{v}\left(X^x_t\right)\sigma\left(X^x_t\right)$.

Théorème

Il existe une fonction $\overline{v}$ localement lipschitzienne et nulle en 0, un processus $\overline{Z}^x$ de carré intégrable et un réel $\overline{\lambda}$ tels qu'en posant $\overline{Y}^x_t = \overline{v}\left(X^x_t\right)$, l'EDSRE admette une solution $\left(\overline{Y}^x, \overline{Z}^x, \overline{\lambda}\right)$.
Si $\overline{v}$ est $\mathcal{C}^1$, alors $\overline{Z}^x_t = \nabla \overline{v}\left(X^x_t\right)\sigma\left(X^x_t\right)$.

Notre solution vérifie $\left|\overline{Y}^x_t\right| \leq c\left(1 + |X^x_t|^2\right)$.

Proposition

Si (Y', Z', λ') est une autre solution de l'EDSRE,
Et si Y' croît au plus polynomialement par rapport à X^x,
Alors $\lambda' = \overline{\lambda}$.

Notre solution vérifie $\left|\overline{Y}_t^x\right| \leq c\left(1+|X_t^x|^2\right)$.

Proposition

Si (Y', Z', λ') est une autre solution de l'EDSRE,
Et si Y' croît au plus polynomialement par rapport à X^x,
Alors $\lambda' = \overline{\lambda}$.

Théorème

Soient $v, \widetilde{v}, \zeta, \widetilde{\zeta}$ des fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ continues et à croissance au plus quadratique.
On suppose que $v(0) = \widetilde{v}(0) = 0$.
Si $\left(v\left(X^x\right), \zeta\left(X^x\right), \lambda\right)$ et $\left(\widetilde{v}\left(X^x\right), \widetilde{\zeta}\left(X^x\right), \widetilde{\lambda}\right)$ sont solutions de l'EDSRE pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,
Alors $\lambda = \widetilde{\lambda}$, $v = \widetilde{v}$ et $\zeta = \widetilde{\zeta}$.

On veut résoudre :

$$\mathcal{L}v(x) + \psi\left(x, \nabla v(x)\sigma(x)\right) = \lambda,$$

d'inconnues v et λ, où $\mathcal{L}$ est défini par :

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(x)\ {}^{\mathrm{t}}\sigma(x)\nabla^2 f(x)\right) + \langle Ax + \Gamma(x), f(x)\rangle.$$

On veut résoudre :

$$\mathcal{L}v(x) + \psi\left(x, \nabla v(x)\sigma(x)\right) = \lambda,$$

d'inconnues v et λ, où $\mathcal{L}$ est défini par :

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(x)\ {}^{\mathrm{t}}\sigma(x)\nabla^2 f(x)\right) + \langle Ax + \Gamma(x), f(x)\rangle.$$

Définition

(v, λ) est dit solution mild si :

- *v est $\mathcal{C}^1$ et ∇v est à croissance polynomiale ;*
- $$v(x) = \mathbb{E}\left[v\left(X^x_{T-t}\right)\right] + \int_t^T \mathbb{E}\left[\psi\left(X^x_{s-t}, \nabla v\left(X^x_{s-t}\right)\sigma\left(X^x_{s-t}\right)\right)\right] ds - \lambda(T-t)$$

Définition

(v, λ) *est dit solution mild si :*

- v *est* $\mathcal{C}^1$ *et* ∇v *est à croissance polynomiale ;*
- $$v(x) = \mathbb{E}\left[v\left(X^x_{T-t}\right)\right] + \int_t^T \mathbb{E}\left[\psi\left(X^x_{s-t}, \nabla v\left(X^x_{s-t}\right)\sigma\left(X^x_{s-t}\right)\right)\right] ds - \lambda(T-t)$$

Théorème

Le couple $\left(\overline{v}, \overline{\lambda}\right)$ *est solution mild de l'équation HJB.*
Réciproquement, si (v, λ) *est solution mild de HJB, alors* $\left(v\left(X^x\right), \nabla v\left(X^x\right)\sigma\left(X^x\right), \lambda\right)$ *est solution de l'EDSRE.*

Contrôle : processus progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.
Soient $R : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ et $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mesurables et telles que :

$$|R(u)| \leq c, \ |L(x,u)| \leq c \text{ et } |L(x,u) - L(x',u)| \leq c|x - x'|.$$

On pose $\rho_T^u = \exp\left(\int_0^T R\left(u_s\right) . \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^T \left|R\left(u_s\right)\right|^2 \mathrm{d}s\right)$ et $\mathbb{P}_T^u = \rho_T^u \mathbb{P}$.
On veut minimiser la fonction coût :

$$J(x,u) = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathbb{E}_T^u \left[\int_0^T L\left(X_s^u, u_s\right) \mathrm{d}s\right].$$

Contrôle : processus progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.
Soient $R : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ et $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mesurables et telles que :

$$|R(u)| \leq c,\ |L(x,u)| \leq c \text{ et } |L(x,u) - L(x',u)| \leq c|x - x'|.$$

On pose $\rho_T^u = \exp\left(\int_0^T R(u_s) \,.\, \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^T |R(u_s)|^2 \,\mathrm{d}s\right)$ et $\mathbb{P}_T^u = \rho_T^u \mathbb{P}$.
On veut minimiser la fonction coût :

$$J(x,u) = \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E}_T^u \left[\int_0^T L(X_s^u, u_s) \,\mathrm{d}s\right].$$

L'EDSR associée à $\psi(x,z) = \inf_{u \in \mathbb{R}^k} \{L(x,u) + z \,.\, R(u)\}$ admet une solution sous la forme $\left(\overline{v}(X_t^x), \overline{\zeta}(X_t^x), \overline{\lambda}\right)$.

On pose $\rho_T^u = \exp\left(\int_0^T R\left(u_s\right) . \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^T \left|R\left(u_s\right)\right|^2 \,\mathrm{d}s\right)$ et $\mathbb{P}_T^u = \rho_T^u \mathbb{P}$.
On veut minimiser la fonction coût :

$$J(x,u) = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathbb{E}_T^u\left[\int_0^T L\left(X_s^u, u_s\right)\,\mathrm{d}s\right].$$

L'EDSR associée à $\psi(x,z) = \inf_{u\in\mathbb{R}^k}\{L(x,u) + z \,.\, R(u)\}$ admet une solution sous la forme $\left(\overline{v}\left(X_t^x\right), \overline{\zeta}\left(X_t^x\right), \overline{\lambda}\right)$.

Théorème

Pour tout contrôle u, on a $J(x,u) \geq \overline{\lambda}$.
Si $L\left(X_t^x, u_t\right) + \overline{\zeta}\left(X_t^x\right) . R\left(u_t\right) = \psi\left(X_t^x, \overline{\zeta}\left(X_t^x\right)\right)$ $\mathbb{P}$-p.s. et pour p.t. $t \geq 0$, alors $J(x,u) = \overline{\lambda}$.