Arrêt optimal de type Wald pour le mouvement brownien*

(Séminaire)
Janvier 2016

Florian Lemonnier

ENS Rennes — Université de Rennes 1

On se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sur lequel on définit un mouvement brownien $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, auquel on associe sa filtration canonique, définie par $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leqslant t)$, qu'on supposera vérifiant les conditions habituelles (continue à droite et complète). Sauf mention contraire, dans la suite, les martingales et temps d'arrêt seront considérés relativement à cette filtration.

1 Arrêt optimal de Wald pour le mouvement brownien

Dans cette section, notre objectif va être de maximiser la quantité $\mathbb{E}[G(|B_\tau|) - c\tau]$, où τ parcourt l'ensemble des $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt intégrables, et où $c > 0$ est un réel fixé et $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant : $\exists \gamma > 0, \exists \delta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, G(|x|) \leqslant \gamma x^2 + \delta$.

1.1 Cas où $G(|x|) = x^2$

On commence par rappeler un premier lemme.

Lemme 1

Le processus $\left(B_t^2 - t\right)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une martingale.

Démonstration :

Pour tout $t \geqslant 0$, $B_t^2 - t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, le processus est donc adapté.
Aussi, $\mathbb{E}\left[\left|B_t^2 - t\right|\right] \leqslant \mathbb{E}\left[B_t^2\right] + t = \mathrm{Var}(B_t) + t = 2t < \infty$.
Enfin, quand $0 \leqslant s \leqslant t$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[B_t^2 - t \middle| \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2 + 2B_t B_s - B_s^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] - t \\
&= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2\right] + 2\mathbb{E}\left[B_t | \mathcal{F}_s\right] B_s - B_s^2 - t \\
&= t - s + B_s^2 - t \\
&= B_s^2 - s.
\end{aligned}$$

■

Comme le processus $\left(B_t^2 - t\right)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est continu, on en déduit immédiatement que $\mathbb{E}\left[B_\tau^2\right] = \mathbb{E}[\tau]$ quand τ est un temps d'arrêt borné. Mais on a un peu mieux !

---

*Ce document a pour base l'article [GP97].

Lemme 2

Pour tout temps d'arrêt intégrable τ, on a $\mathbb{E}\left[B_\tau^2\right] = \mathbb{E}[\tau]$.

Démonstration :

Soit τ un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt intégrable, et soit $n \in \mathbb{N}^*$; par le théorème d'arrêt ($\tau \wedge n$ étant un temps d'arrêt borné), puis par le théorème de convergence monotone :

$$\mathbb{E}\left[B_{\tau\wedge n}^2\right] = \mathbb{E}[\tau \wedge n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[\tau].$$

Sachant que $\mathcal{L}\left(B_\tau - B_{\tau\wedge n} | \tau\right) = \mathcal{N}(0, \tau - \tau \wedge n)$, on a :

$$\mathbb{E}\left[\left(B_\tau - B_{\tau\wedge n}\right)^2 \middle| \tau\right] = \tau - \tau \wedge n.$$

Ainsi, par la même convergence monotone, il vient :

$$\mathbb{E}\left[\left(B_\tau - B_{\tau\wedge n}\right)^2\right] = \mathbb{E}[\tau] - \mathbb{E}[\tau \wedge n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mais, d'autre part :

$$\mathbb{E}\left[\left(B_\tau - B_{\tau\wedge n}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[B_\tau^2\right] - 2\mathbb{E}\left[B_\tau B_{\tau\wedge n}\right] + \mathbb{E}\left[B_{\tau\wedge n}^2\right].$$

Pour calculer $\mathbb{E}\left[B_\tau B_{\tau\wedge n}\right]$, on fait apparaître une espérance conditionnelle ; dès lors :

$$\mathbb{E}\left[B_\tau B_{\tau\wedge n}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[B_\tau B_{\tau\wedge n} | \tau\right]\right] = \mathbb{E}[\tau \wedge (\tau \wedge n)] = \mathbb{E}[\tau \wedge n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[\tau].$$

On en déduit alors que $\mathbb{E}\left[B_{\tau\wedge n}^2\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\mathbb{E}[\tau] - \mathbb{E}\left[B_\tau^2\right]$.

On conclut par unicité de la limite que $\mathbb{E}[\tau] = 2\mathbb{E}[\tau] - \mathbb{E}\left[B_\tau^2\right]$, d'où :

$$\mathbb{E}\left[B_\tau^2\right] = \mathbb{E}[\tau].$$

■

Revenons à notre problème : on souhaite maximiser $\mathbb{E}\left[B_\tau^2 - c\tau\right] = (1-c)\mathbb{E}[\tau]$. Si $c \in]0,1[$, alors on montre que le supremum vaut $+\infty$ en considérant les temps d'arrêt constants $\tau \equiv n$ et en faisant tendre n vers l'infini. Si $c = 1$, alors le maximum vaut 0 et tous les temps d'arrêt sont optimaux. Si $c \in]1, +\infty[$, alors le maximum vaut 0 et est atteint pour le temps d'arrêt identiquement nul.

1.2 Cas où $G(|x|) = |x|^p$, avec $p \in]0,2[$

On souhaite donc ici maximiser la quantité $\mathbb{E}\left[|B_\tau|^p - c\tau\right]$, où τ est un temps d'arrêt intégrable.

Théorème 3 (*Arrêt optimal de Wald*)

Soient $p \in]0,2[$ et $c > 0$ deux réels.
Le temps d'arrêt optimal pour notre problème est défini par

$$\tau_{p,c}^* = \inf\left\{ t \geqslant 0 \middle| |B_t| = \left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{1}{2-p}} \right\}.$$

De plus, on a la borne suivante :

$$\sup_\tau \mathbb{E}\left[|B_\tau|^p - c\tau\right] = \frac{2-p}{2}\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{p}{2-p}}, \qquad (1)$$

le supremum étant pris sur l'ensemble des temps d'arrêt intégrables.

Remarque : Le temps d'arrêt $\tau_{p,c}^*$ est effectivement intégrable.

Pour $a > 0$, notons $T_a = \inf\{t \geqslant 0 | |B_t| \geqslant a\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $T_a \wedge n$ est borné,

$$\mathbb{E}\left[B_{T_a\wedge n}^2\right] = \mathbb{E}\left[T_a \wedge n\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[T_a\right],$$

par convergence monotone.

Mais on a également

$$\mathbb{E}\left[B^2_{T_a\wedge n}\right] = \mathbb{E}\left[B^2_{T_a}\mathbb{1}_{T_a\leqslant n} + B^2_n\mathbb{1}_{T_a>n}\right] = a^2\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T_a\leqslant n}\right] + \mathbb{E}\left[B^2_n\mathbb{1}_{T_a>n}\right].$$

D'une part, grâce à une convergence monotone, $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T_a\leqslant n}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. D'autre part, d'après le théorème de convergence dominée, comme $\left|B^2_n\mathbb{1}_{T_a>n}\right| \leqslant a^2$, on a $\mathbb{E}\left[B^2_n\mathbb{1}_{T_a>n}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi,

$$\mathbb{E}\left[B^2_{T_a\wedge n}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a^2.$$

D'où, par unicité de la limite :

$$\mathbb{E}\left[T_a\right] = a^2. \tag{2}$$

Démonstration :

Soit τ un temps d'arrêt intégrable, on définit

$$V_\tau(p,c) = \mathbb{E}\left[|B_\tau|^p - c\tau\right] = \mathbb{E}\left[|B_\tau|^p - B^2_\tau\right] = \int_{\mathbb{R}}\left(|x|^p - cx^2\right)\,\mathrm{d}F_{B_\tau}(x),$$

où F_{B_τ} désigne la fonction de répartition de la variable aléatoire B_τ.

On va chercher à maximiser la fonction $D_{p,c} : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x|^p - cx^2 \end{array}\right.$; et comme $D_{p,c}$ est une fonction paire, on se restreint à une maximisation sur $\mathbb{R}^+$.

$D_{p,c}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $x > 0$:

$$D'_{p,c}(x) = px^{p-1} - 2cx = \left(px^{p-2} - 2c\right)x.$$

Conséquemment, $D_{p,c}$ atteint son maximum en $\pm\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{1}{2-p}}$ et

$$V_\tau(p,c) = \int_{\mathbb{R}} D_{p,c}(x)\,\mathrm{d}F_{B_\tau}(x) \leqslant D_{p,c}\left(\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{1}{2-p}}\right).$$

On calcule :

$$D_{p,c}\left(\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{1}{2-p}}\right) = \left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{p}{2-p}} - c\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{2}{2-p}} = \left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{p}{2-p}}\left[1 - c\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{2}{2-p}-\frac{p}{2-p}}\right] = \left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{p}{2-p}}\frac{2-p}{2}.$$

Et cette borne est atteinte en $\tau = \tau^*_{p,c}$, car alors

$$\begin{aligned} V_{\tau^*_{p,c}}(p,c) &= D_{p,c}\left(-\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{1}{2-p}}\right)\mathbb{P}\left(B_{\tau^*_{p,c}} = -\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{1}{2-p}}\right) + D_{p,c}\left(\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{1}{2-p}}\right)\mathbb{P}\left(B_{\tau^*_{p,c}} = \left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{1}{2-p}}\right) \\ &= D_{p,c}\left(\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{1}{2-p}}\right), \end{aligned}$$

$B_{\tau^*_{p,c}}$ ne pouvant prendre que les valeurs $\pm\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{1}{2-p}}$, et $D_{p,c}$ étant paire. ■

1.3 Cas général

Il s'agit ici de reprendre l'architecture de la preuve du théorème précédent. Quand on fixe $c > 0$ et G une fonction vérifiant : $\exists\gamma > 0, \exists\delta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, G(|x|) \leqslant \gamma x^2 + \delta$, alors, pour tout temps d'arrêt intégrable τ, on peut définir

$$V_\tau(G,c) = \mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right) - c\tau\right] = \mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right) - cB^2_\tau\right] = \int_{\mathbb{R}} D_{G,c}(x)\,\mathrm{d}F_{B_\tau}(x),$$

où $D_{G,c} : x \mapsto G(|x|) - cx^2$.

L'objectif est alors de maximiser $D_{G,c}$, et alors deux cas se présentent :

– Si $D_{G,c}$ atteint son maximum sur $\mathbb{R}$, disons en $x_{\max}$, alors pour tout temps d'arrêt intégrable τ

$$V_\tau(G,c) = \int_{\mathbb{R}} D_{G,c}(x)\,\mathrm{d}F_{B_\tau}(x) \leqslant D_{G,c}\left(x_{\max}\right).$$

Le temps d'arrêt optimal est ici :

$$\tau^*_{G,c} = \inf\left\{t \geqslant 0 \middle| |B_t| \geqslant x_{\max}\right\} = T_{x_{\max}}.$$

Et on a :

$$\sup_\tau \mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right) - c\tau\right] = D_{G,c}\left(x_{\max}\right),$$

le supremum étant pris sur l'ensemble des temps d'arrêt intégrables.

– Si $D_{G,c}$ atteint son maximum sur $\overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$, alors pour tout temps d'arrêt intégrable τ

$$V_\tau(G,c) = \int_{\mathbb{R}} D_{G,c}(x)\,\mathrm{d}F_{B_\tau}(x) \leqslant \lim_{x\to+\infty} D_{G,c}(x).$$

On pose $\tau^{(r)}_{G,c} = \inf\left\{t \geqslant 0 \middle| |B_t| \geqslant r\right\} = T_r$, où $r > 0$. Ainsi, on a :

$$V_{\tau^{(r)}_{G,c}}(G,c) = D_{G,c}(r).$$

En conséquence, il vient :

$$\forall r > 0, \sup_\tau \mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right) - c\tau\right] \geqslant D_{G,c}(r),$$

ce qui permet alors de dire, par passage à la limite de r vers l'infini :

$$\sup_\tau \mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right) - c\tau\right] = \lim_{x\to+\infty} D_{G,c}(x),$$

le supremum étant pris sur l'ensemble des temps d'arrêt intégrables.

2 Quelques conséquences de ce théorème

2.1 Espérance d'une fonction du mouvement brownien arrêté

Théorème 4

Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, et soit τ un temps d'arrêt. Alors

$$\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] \leqslant \inf_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\tau] + \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(G(|x|) - cx^2\right)\right).$$

Et si τ est intégrable, on a aussi :

$$\sup_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\tau] + \inf_{x\in\mathbb{R}}\left(G(|x|) - cx^2\right)\right) \leqslant \mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right].$$

Remarque : Le terme de droite de chacune de ces inégalités peut éventuellement être infini.

Démonstration :

La première inégalité étant triviale si τ n'est pas intégrable, on suppose que τ est intégrable dans la suite. Pour $c > 0$, on note $D_{G,c} : x \mapsto G(|x|) - cx^2$, et $y^{(G,c)}_{\max}$ sa valeur maximale sur $\overline{\mathbb{R}^+}$ (potentiellement, on peut avoir $y^{(G,c)}_{\max} = +\infty$). Immédiatement, $\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right) - c\tau\right] \leqslant y^{(G,c)}_{\max}$, d'où :

$$\forall c > 0, \mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] \leqslant c\mathbb{E}[\tau] + y^{(G,c)}_{\max}.$$

Il suffit alors de prendre l'infimum selon $c > 0$:

$$\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] \leqslant \inf_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\tau] + y_{\max}^{(G,c)}\right).$$

Similairement, en notant $y_{\min}^{(G,c)}$ la valeur minimale de $D_{G,c}$, on a, quand τ est intégrable :

$$\forall c > 0, \mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] \geqslant c\mathbb{E}[\tau] + y_{\min}^{(G,c)}.$$

D'où l'on déduit

$$\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] \geqslant \sup_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\tau] + y_{\min}^{(G,c)}\right).$$

■

Remarque : Si $H : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, on peut définir sa fonction conjuguée par $\widetilde{H}(c) = \inf_{x\geqslant 0}(cx - H(x))$. Ainsi, si on note $H : x \mapsto G(\sqrt{x})$, on a $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(G(|x|) - cx^2\right) = -\inf_{x\geqslant 0}(cx - H(x)) = -\widetilde{H}(c)$, d'où on déduit ensuite que $\inf_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\tau] + \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(G(|x|) - cx^2\right)\right) = \inf_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\tau] - \widetilde{H}(c)\right) = \widetilde{\widetilde{H}}(\mathbb{E}[\tau])$. Cela vient également de l'inégalité de Jensen, étant donné que la biconjuguée $\widetilde{\widetilde{H}}$ est la plus petite fonction concave qui majore H. Par ailleurs, si $x \mapsto G(\sqrt{x})$ est concave, on obtient par Jensen :

$$\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] \leqslant G\left(\sqrt{\mathbb{E}\left[B_\tau^2\right]}\right) = G\left(\sqrt{\mathbb{E}[\tau]}\right).$$

Proposition 5 (*Optimalité dans le théorème précédent*)

Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.
Pour tout $c > 0$, on désigne par $x_{max}^{(G,c)}$ le plus petit point où $D_{G,c}$ atteint son maximum sur $\overline{\mathbb{R}^+}$.
S'il existe $\gamma > 0$ tel que $x_{max}^{(G,\gamma)} < \infty$, alors

$$\sup_\tau\left(\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] - \inf_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\tau] + \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(G(|x|) - cx^2\right)\right)\right) = 0,$$

le supremum étant pris sur l'ensemble des temps d'arrêt intégrables.
Pour tout $c > 0$, on désigne par $x_{min}^{(G,c)}$ le plus petit point où $D_{G,c}$ atteint son minimum sur $\overline{\mathbb{R}^+}$.
S'il existe $\gamma > 0$ tel que $x_{min}^{(G,\gamma)} < \infty$, alors

$$\inf_\tau\left(\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] - \sup_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\tau] + \inf_{x\in\mathbb{R}}\left(G(|x|) - cx^2\right)\right)\right) = 0,$$

l'infimum étant pris sur l'ensemble des temps d'arrêt intégrables.

Démonstration :

Il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned}\sup_\tau\left(\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] - \inf_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\tau] + D_{G,c}\left(x_{\max}^{(G,c)}\right)\right)\right) &= \sup_\tau\sup_{c>0}\left(\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] - c\mathbb{E}[\tau] - D_{G,c}\left(x_{\max}^{(G,c)}\right)\right)\\ &\geqslant \mathbb{E}\left[G\left(\left|B_{T_{x_{\max}^{(G,\gamma)}}}\right|\right)\right] - c\mathbb{E}\left[T_{x_{\max}^{(G,\gamma)}}\right] - D_{G,\gamma}\left(x_{\max}^{(G,\gamma)}\right)\\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

L'égalité est assurée par le théorème précédent.

Les calculs sont similaires pour la deuxième égalité :

$$\begin{aligned}\inf_{\tau}\left(\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right]-\sup_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\tau]+D_{G,c}\left(x_{\min}^{(G,c)}\right)\right)\right) &= \inf_{\tau}\inf_{c>0}\left(\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right]-c\mathbb{E}[\tau]-D_{G,c}\left(x_{\min}^{(G,c)}\right)\right)\\ &\leqslant \mathbb{E}\left[G\left(\left|B_{T_{x_{\min}^{(G,\gamma)}}}\right|\right)\right]-c\mathbb{E}\left[T_{x_{\min}^{(G,\gamma)}}\right]-D_{G,\gamma}\left(x_{\min}^{(G,\gamma)}\right)\\ &\leqslant 0.\end{aligned}$$

■

Corollaire 6

Si $p\in]0,2[$, alors on a :

$$\sup_{\tau}\left(\mathbb{E}\left[|B_\tau|^p\right]-\mathbb{E}[\tau]^{\frac{p}{2}}\right)=0,$$

le supremum étant pris sur l'ensemble des temps d'arrêt intégrables.

Démonstration :

On va appliquer le résultat précédent.
Déjà, la fonction $x\mapsto|x|^p-x^2$ admet son maximum en un point fini, car sa limite vaut $-\infty$ en $+\infty$.
Montrons donc que $\inf_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\tau]+\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(|x|^p-cx^2\right)\right)=\mathbb{E}[\tau]^{\frac{p}{2}}$, où τ désigne un temps d'arrêt intégrable.
Reprenons les notations et calculs de la section précédente : on écrit $D_{p,c}(x)=|x|^p-cx^2$ et on a $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(|x|^p-cx^2\right)=D_{p,c}\left(\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{1}{2-p}}\right)=\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{p}{2-p}}\frac{2-p}{2}$.
On définit alors $f:c\mapsto c\mathbb{E}[\tau]+\frac{2-p}{2}\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{p}{2-p}}$; cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$f'(c)=\mathbb{E}[\tau]+\frac{2-p}{2}\frac{p}{2-p}\frac{-p}{2c^2}\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{p}{2-p}-1}=\mathbb{E}[\tau]-\left(\frac{p}{2c}\right)^2\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{p}{2-p}-1}=\mathbb{E}[\tau]-\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{2}{2-p}}$$

Ainsi, $f'(c)\geqslant 0\Leftrightarrow\mathbb{E}[\tau]\geqslant\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{2}{2-p}}\Leftrightarrow c\geqslant\frac{p}{2}\mathbb{E}[\tau]^{\frac{p-2}{2}}$.
On en déduit que f est minimale en $\frac{p}{2}\mathbb{E}[\tau]^{\frac{p-2}{2}}$, or $f\left(\frac{p}{2}\mathbb{E}[\tau]^{\frac{p-2}{2}}\right)=\frac{p}{2}\mathbb{E}[\tau]^{\frac{p}{2}}+\frac{2-p}{2}\left(\mathbb{E}[\tau]^{\frac{2-p}{2}}\right)^{\frac{p}{2-p}}=\mathbb{E}[\tau]^{\frac{p}{2}}$.
Ce qu'il fallait démontrer. ■

Remarque : On rappelle que pour $p=2$, on a montré que $\mathbb{E}\left[B_\tau^2\right]=\mathbb{E}[\tau]$, dès que τ est un temps d'arrêt intégrable.

Corollaire 7

Si $p\in]2,+\infty[$, alors on a :

$$\inf_{\tau}\left(\mathbb{E}\left[|B_\tau|^p\right]-\mathbb{E}[\tau]^{\frac{p}{2}}\right)=0,$$

l'infimum étant pris sur l'ensemble des temps d'arrêt intégrables.

Démonstration :

On va suivre à peu près la même démarche que dans le corollaire précédent.
Déjà, la fonction $x\mapsto|x|^p-x^2$ admet son minimum en un point fini, car sa limite vaut $+\infty$ en $+\infty$.
Montrons donc que $\sup_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\tau]+\inf_{x\in\mathbb{R}}\left(|x|^p-cx^2\right)\right)=\mathbb{E}[\tau]^{\frac{p}{2}}$, où τ désigne un temps d'arrêt intégrable.
On écrit $D_{p,c}(x)=|x|^p-cx^2$ et on a $\inf_{x\in\mathbb{R}}\left(|x|^p-cx^2\right)=D_{p,c}\left(\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{1}{2-p}}\right)=\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{p}{2-p}}\frac{2-p}{2}$ (les calculs restent les mêmes).
On définit $f:c\mapsto c\mathbb{E}[\tau]+\frac{2-p}{2}\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{p}{2-p}}$, fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f'(c)=\mathbb{E}[\tau]-\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{2}{2-p}}$.
Ainsi, $f'(c)\geqslant 0\Leftrightarrow\mathbb{E}[\tau]\geqslant\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{2}{2-p}}\Leftrightarrow c\leqslant\frac{p}{2}\mathbb{E}[\tau]^{\frac{p-2}{2}}$.

On en déduit que f est maximale en $\frac{p}{2}\mathbb{E}[\tau]^{\frac{p-2}{2}}$, or $f\left(\frac{p}{2}\mathbb{E}[\tau]^{\frac{p-2}{2}}\right) = \mathbb{E}[\tau]^{\frac{p}{2}}$.
Ce qu'il fallait démontrer. ■

Un rappel sur le changement de temps. Si M est une martingale locale issue de zéro, et telle que $\langle M\rangle_\infty = \infty$ ps, alors il existe un mouvement brownien $\widetilde{B}$ (dit de Dambis-Dubins-Schwarz), tel que $\forall t \geqslant 0, M_t = \widetilde{B}_{\langle M\rangle_t}$. Mais l'hypothèse $\langle M\rangle_\infty = \infty$ ps est parfois trop restrictive.

On appelle grossissement de l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \left(\widetilde{\mathcal{F}_t}\right), \widetilde{\mathbb{P}}\right)$ tel qu'il existe une application $\pi : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ vérifiant $\pi^{-1}(\mathcal{F}_t) \subset \widetilde{\mathcal{F}_t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $\pi\left(\widetilde{\mathbb{P}}\right) = \mathbb{P}$. Un processus X défini sur Ω peut être vu comme défini sur $\widetilde{\Omega}$ en posant $X(\widetilde{\omega}) = X(\omega)$, où $\omega = \pi(\widetilde{\omega})$. Ainsi, de façon générale, si M est une martingale locale issue de zéro, il existe un grossissement $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \left(\widetilde{\mathcal{F}_t}\right), \widetilde{\mathbb{P}}\right)$ et un mouvement brownien $\widetilde{B}$ défini sur cet espace et tel que $M_t = \widetilde{B}_{\langle M\rangle_t}$, pour tout $t \geqslant 0$.[1]

Ainsi, on peut généraliser les résultats précédents.

Théorème 8

Soit M une martingale locale continue, issue de zéro.
Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, et soit $t > 0$, tel que $\mathbb{E}[\langle M\rangle_t] < \infty$. Alors

$$\mathbb{E}[G(|M_t|)] \leqslant \inf_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\langle M\rangle_t] + \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(G(|x|) - cx^2\right)\right).$$

Et on a aussi :

$$\sup_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\langle M\rangle_t] + \inf_{x\in\mathbb{R}}\left(G(|x|) - cx^2\right)\right) \leqslant \mathbb{E}[G(|M_t|)].$$

Démonstration :
Par exemple, pour la première inégalité, on écrit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G(|M_t|)] &= \widetilde{\mathbb{E}}[G(|M_t|)] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[G\left(\left|\widetilde{B}_{\langle M\rangle_t}\right|\right)\right] \\ &\leqslant \inf_{c>0}\left(c\widetilde{\mathbb{E}}[\langle M\rangle_t] + \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(G(|x|) - cx^2\right)\right) = \inf_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\langle M\rangle_t] + \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(G(|x|) - cx^2\right)\right).\end{aligned}$$

En effet, l'espérance d'une variable aléatoire A définie sur Ω sous la loi $\mathbb{P}$ est la même que son espérance sous $\widetilde{\mathbb{P}}$, car :

$$\int_\Omega A(\omega)\,\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_{\widetilde{\Omega}} A(\pi(\widetilde{\omega}))\,\widetilde{\mathbb{P}}(\mathrm{d}\widetilde{\omega}).$$

La deuxième inégalité se montre exactement de la même façon. ■

2.2 Espérance du maximum du mouvement brownien (réfléchi)

Lemme 9

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on définit $S_t := \sup_{0\leqslant s\leqslant t} B_s$.
Alors, pour tout $t \geqslant 0$, S_t a la même loi que $|B_t|$.

1. Pour une démonstration, on pourra consulter le théorème 1.7, page 182, de [RY99].

Démonstration :

On va montrer un résultat plus fort : si $a \geqslant b \geqslant 0$, alors $\mathbb{P}(S_t \geqslant a, B_t \leqslant b) = \mathbb{P}(B_t \geqslant 2a - b)$. On note $\tau = \inf\{t \geqslant 0 | B_t = a\}$; on sait que $\tau < +\infty$ ps. On a :

$$\mathbb{P}(S_t \geqslant a, B_t \leqslant b) = \mathbb{P}(\tau \leqslant t, B_t \leqslant b) = \mathbb{P}\left(\tau \leqslant t, B'_{t-\tau} \leqslant b - a\right),$$

où on écrit $B'_{t-\tau} = B_t - B_\tau = B_t - a$. Par la propriété de Markov forte, B' est un mouvement brownien. Comme B' et $-B'$ ont même loi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\tau \leqslant t, B'_{t-\tau} \leqslant b - a\right) &= \int_0^t \mathbb{P}\left(B'_{t-u} \leqslant b - a\right) \mathrm{d}F_\tau(u) = \int_0^t \mathbb{P}\left(-B'_{t-u} \leqslant b - a\right) \mathrm{d}F_\tau(u) \\ &= \int_0^t \mathbb{P}\left(B'_{t-u} \geqslant a - b\right) \mathrm{d}F_\tau(u) = \mathbb{P}\left(\tau \leqslant t, B'_{t-\tau} \geqslant a - b\right) \\ &= \mathbb{P}(\tau \leqslant t, B_t - a \geqslant a - b) = \mathbb{P}(\tau \leqslant t, B_t \geqslant 2a - b) \\ &= \mathbb{P}(B_t \geqslant 2a - b),\end{aligned}$$

l'événement $\{B_t \geqslant 2a - b\}$ étant contenu dans $\{\tau \leqslant t\}$, vu que $b \leqslant a$.

Dès lors, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_t \geqslant a) &= \mathbb{P}(S_t \geqslant a, B_t \geqslant a) + \mathbb{P}(S_t \geqslant a, B_t < a) = \mathbb{P}(B_t \geqslant a) + \mathbb{P}(B_t \geqslant a) \\ &= \mathbb{P}(B_t \geqslant a) + \mathbb{P}(-B_t \geqslant a) = \mathbb{P}(B_t \geqslant a) + \mathbb{P}(B_t \leqslant -a) \\ &= \mathbb{P}(|B_t| \geqslant a).\end{aligned}$$

■

Ce lemme nous permet de déduire de la sous-section précédente cette proposition.

Proposition 10

Pour tout temps d'arrêt intégrable τ, on a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leqslant s \leqslant \tau} B_s\right] = \mathbb{E}[|B_\tau|] \leqslant \sqrt{\mathbb{E}[\tau]}.$$

De plus, le temps d'arrêt $T_a = \inf\{t \geqslant 0 | |B_t| \geqslant a\}$ réalise $\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leqslant s \leqslant T_a} B_s\right] = \sqrt{\mathbb{E}[T_a]}$, pour tout $a > 0$.

On peut à nouveau étendre ce résultat aux martingales locales continues, en utilisant le mouvement brownien de Dambis-Dubins-Schwarz. En effet, si M est une martingale locale continue, alors :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} M_s\right] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} M_s\right] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \widetilde{B}_{\langle M \rangle_s}\right] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\sup_{0 \leqslant s \leqslant \langle M \rangle_t} \widetilde{B}_s\right] \leqslant \sqrt{\widetilde{\mathbb{E}}[\langle M \rangle_t]} = \sqrt{\mathbb{E}[\langle M \rangle_t]}.$$

Proposition 11

Pour tout temps d'arrêt intégrable τ, on a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leqslant s \leqslant \tau} |B_s|\right] \leqslant \sqrt{2\mathbb{E}[\tau]}.$$

Démonstration :

Soit τ un temps d'arrêt intégrable.

Pour tout $t \geqslant 0$, on définit $M_t := \mathbb{E}[|B_\tau| - \mathbb{E}[|B_\tau|] | \mathcal{F}_{t\wedge\tau}]$. Ainsi, M est une martingale continue à droite :

- pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, M_t est $\mathcal{F}_{t\wedge\tau}$-mesurable, donc $\mathcal{F}_t$-mesurable ;
- pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, M_t est intégrable :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|M_t|] = \mathbb{E}[|\mathbb{E}[|B_\tau| - \mathbb{E}[|B_\tau|] | \mathcal{F}_{t\wedge\tau}]|] &\leqslant \mathbb{E}[\mathbb{E}[||B_\tau| - \mathbb{E}[|B_\tau|]| | \mathcal{F}_{t\wedge\tau}]] \leqslant \mathbb{E}[||B_\tau| - \mathbb{E}[|B_\tau|]|] \\ &\leqslant \mathbb{E}[|B_\tau| + \mathbb{E}[|B_\tau|]] \leqslant 2\mathbb{E}[|B_\tau|] \leqslant 2\sqrt{\mathbb{E}[\tau]} < +\infty;\end{aligned}$$

– si $t \geqslant s \geqslant 0$, on a, par $\mathcal{F}_\tau$-mesurabilité de M_t :

$$\mathbb{E}\left[M_t|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[M_t|\mathcal{F}_{s\wedge\tau}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[|B_\tau| - \mathbb{E}\left[|B_\tau|\right]|\mathcal{F}_{t\wedge\tau}\right]|\mathcal{F}_{s\wedge\tau}\right] = \mathbb{E}\left[|B_\tau| - \mathbb{E}\left[|B_\tau|\right]|\mathcal{F}_{s\wedge\tau}\right] = M_s;$$

– enfin, M admet une modification continue à droite et adaptée.[2]

Comme τ est intégrable, il est fini presque sûrement, et donc $t\wedge\tau \xrightarrow[t\to+\infty]{\text{p.s.}} \tau$. Et comme M est une martingale continue à droite bornée dans L^1, en conséquence, $M_t \xrightarrow[t\to+\infty]{\text{p.s.}} M_\infty = \mathbb{E}\left[|B_\tau| - \mathbb{E}\left[|B_\tau|\right]|\mathcal{F}_\tau\right] = |B_\tau| - \mathbb{E}\left[|B_\tau|\right]$.

Comme on sait que $\mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} M_s\right] \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t\right]}$, par convergence monotone :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s<\infty} M_s\right] \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty\right]} = \sqrt{\mathbb{E}\left[M_\infty^2\right]} = \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(|B_\tau| - \mathbb{E}\left[|B_\tau|\right]\right)^2\right]} = \sqrt{\operatorname{Var}\left(|B_\tau|\right)}.$$

On en déduit, B étant une martingale :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau}|B_s|\right] &= \mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s<\infty}|B_{s\wedge\tau}|\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s<\infty}\left|\mathbb{E}\left[B_\tau|\mathcal{F}_{s\wedge\tau}\right]\right|\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s<\infty}\mathbb{E}\left[|B_\tau||\mathcal{F}_{s\wedge\tau}\right]\right] \\ &\leqslant \mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s<\infty} M_s\right] + \mathbb{E}\left[|B_\tau|\right] \leqslant \sqrt{\operatorname{Var}\left(|B_\tau|\right)} + \mathbb{E}\left[|B_\tau|\right] = \sqrt{\mathbb{E}\left[|B_\tau|^2\right] - \mathbb{E}\left[|B_\tau|\right]^2} + \mathbb{E}\left[|B_\tau|\right] \\ &\leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left[\tau\right] - \mathbb{E}\left[|B_\tau|\right]^2} + \mathbb{E}\left[|B_\tau|\right]\end{aligned}$$

On pose alors $f : x \mapsto \sqrt{A - x^2} + x$, fonction définie et dérivable sur $]0, A[$, où $A > 0$.

On calcule $f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{A - x^2}}$, et on montre que $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \sqrt{\dfrac{A}{2}}$.

Dès lors, f est maximale en $\sqrt{\dfrac{A}{2}}$ et $f\left(\sqrt{\dfrac{A}{2}}\right) = \sqrt{\dfrac{A}{2}} + \sqrt{\dfrac{A}{2}} = \sqrt{2A}$.

Dans notre contexte, cela nous fournit l'inégalité demandée :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau}|B_s|\right] \leqslant \sqrt{2\mathbb{E}[\tau]}.$$

■

De plus, le temps d'arrêt $\tau^* = \inf\left\{t \geqslant 0 \,\middle|\, \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|B_s| - |B_t| \geqslant a\right\}$ réalise $\mathbb{E}\left[\max\limits_{0\leqslant s\leqslant\tau^*}|B_s|\right] = \sqrt{2\mathbb{E}\left[\tau^*\right]}$, pour tout $a > 0$.[3]

Références

[DSS93] L. DUBINS, L. SHEPP et A. SHIRYAEV – « Optimal stopping rules and maximal inequalities for Bessel processes », *Theory of Probability and its Applications* **38** (1993), no. 2, p. 226–261.

[GP97] S. GRAVERSEN et G. PESKIR – « On Wald-type optimal stopping for brownian motion », *Journal of Applied Probability* **34** (1997), no. 1, p. 66–73.

[KS88] I. KARATZAS et S. E. SHREVE – *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer-Verlag, 1988.

[RY99] D. REVUZ et M. YOR – *Continuous martingales and brownian motion*, 3e éd., Springer, 1999.

2. On a en fait ce résultat plus général :

Théorème

Soit X une $(\mathcal{F}_t)$-sous-martingale ; on suppose que $(\mathcal{F}_t)$ vérifie les conditions habituelles. Alors le processus X admet une modification continue à droite si, et seulement si, la fonction $t \mapsto \mathbb{E}\left[X_t\right]$ est continue à droite sur $\mathbb{R}^+$. Et si une telle modification existe, alors il en existe une qui soit càdlàg et adaptée à $(\mathcal{F}_t)$.

Pour une démonstration, on se référera à [KS88], théorème 3.13, page 16.

3. Pour une démonstration, on renvoie à [DSS93].