

Exercices du cours PS1

1. ENSEMBLES ET DÉNOMBREMENTS

Exercice 1.1. Dans l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on considère les trois sous-ensembles

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{1, 3, 5\}, \quad C = \{3, 4, 5, 6\}$$

Déterminer les sous-ensembles suivants :

- a) $A \cup (B \cap C)$
- b) $(A \cup B) \cap C$
- c) $(A \cup B)^c$
- d) $A \setminus B$
- e) $A \cap B \cap C$
- f) $A \Delta B$

Exercice 1.2. Trouver un exemple d'ensembles E, F, G tels que $(E \setminus F) \setminus G \neq E \setminus (F \setminus G)$

Exercice 1.3. Soit Ω un ensemble, et $A \subset \Omega$ un sous-ensemble. Supposons $\text{Card}(A) = p$ et $\text{Card}(\Omega) = n$.

1. Quel est le nombre de sous-ensembles de Ω ?
2. Quel est le nombre de sous-ensembles de Ω contenant A ?
3. Quel est le nombre de sous-ensembles de Ω disjoints de A ?

Exercice 1.4. On veut placer n convives autour d'une table circulaire avec n chaises. Combien y a-t-il de dispositions possibles, sachant que deux dispositions sont identiques si chaque convive a le même voisin de gauche et le même voisin de droite.

Exercice 1.5. Combien de résultats possibles (en tenant compte de l'ordre) y a-t-il si l'on jette un dé quatre fois ? Et combien de résultats contenant au moins un 6 ?

Exercice 1.6. On prend un jeu classique de 32 cartes (en particulier, il contient 16 cartes noires et 16 cartes rouges). On tire trois fois (sans remise).

1. En tenant compte de l'ordre, combien de résultats possibles y a-t-il ?
2. Combien d'entre eux contiennent exactement une carte rouge ?

Exercice 1.7. (Coefficients binomiaux) Démontrer les égalités suivantes :

1. Si $0 \leq k \leq n$, alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. Si $1 \leq k \leq n$, alors $k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$
3. Si $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ (formule du binôme de Newton)
4. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
5. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$. (Par exemple : $\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 0$)

Exercice 1.8. Il y a 4 types de gâteaux dans une pâtisserie.
De combien de façons peut-on acheter 7 gâteaux ?