Equation de Bessel

Référence : FGNan4 p.101
Leçons : 220, 221, (241) (243), (244).

Le but est d'étudier l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad xy'' + y' + xy = 0$$

Déjà, par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, on sait que l'ensemble des solutions sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ est un espace vectoriel de dimension 2 (0 est un point singulier donc il faut étudier à la main le raccordement en 0 des solutions)

Etape 1 Montrons que $g : x \longmapsto \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(\theta))\mathrm{d}\theta$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre s'applique facilement car on intègre sur le compact $[0, \pi]$ et l'intégrande et ses dérivées sont bornées (ce sont des polynômes en cos et sin). On obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin(\theta))\sin(\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$g''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(\theta))\sin^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

On obtient alors après calculs

$$\begin{aligned} xg''(x) + g'(x) + xg(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big(x\cos(x\sin(\theta))\cos^2(\theta) - \sin(x\sin(\theta))\sin(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\sin(x\sin(\theta))\cos(\theta)\right]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Etape 2 Déterminons les solutions DSE(0) de (E). Raisonnons par analyse-synthèse :

Analyse : soit f une solution DSE(0) de (E). Il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $R > 0$ tels que pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Par dérivation terme à terme d'une série entière on a :

$$0 = xf''(x) + f'(x) + xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^2 a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n.$$

D'après l'unicité du développement en série entière on obtient

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ (n+1)^2 a_{n+1} = -a_{n-1}$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_{2n+1} &= 0 \\ a_{2n} &= \dfrac{(-1)^n a_0}{(2n)^2(2n-2)^2\cdots(2)^2} = \dfrac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}a_0 \end{cases}$$

Synthèse : La série entière $a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n}$ a un rayon de convergence infini.

En effet, notons $u_n = \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n}$ de sorte que

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{4x^2}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

donc pour tout $x \geqslant 0$ la série $\sum u_n$ converge par la règle de d'Alembert. Comme $f(0) = a_0$, il existe une unique solution f_0 DSE(0) vérifiant $f_0(0) = 1$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}.$$

Etape 3 Soit f une solution de (E) sur $]0, a[$. Montrons que (f, f_0) est libre si et seulement si f n'est pas bornée au voisinage de 0 .

$\Leftarrow$ f_0 est continue sur $\mathbb{R}$ donc bornée au voisinage de 0. Par suite, si (f, f_0) est liée, f est aussi bornée au voisinage de 0.

$\Rightarrow$ Supposons maintenant que la famille (f, f_0) soit libre. Sur $]0, a[$, (E) est équivalente à

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 et (f, f_0) en est une base. Considérons le Wronskien

$$W = \begin{vmatrix} f & f_0 \\ f' & f_0' \end{vmatrix} = f f_0' - f_0 f'$$

Pour tout $x \in]0, a[$ on a, en remplaçant $f''(x)$ par $-\frac{1}{x} f'(x) - f(x)$ (et de même pour f_0),

$$W'(x) = f(x) f_0''(x) - f_0(x) f''(x) = -\frac{1}{x} W(x).$$

Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0, a[$, $W(x) = C\mathrm{e}^{-\ln(x)} = \frac{C}{x}$ et C n'est pas nul puisque (f, f_0) est libre. Supposons que f soit bornée au voisinage de 0. Par ce qui précède et compte tenu du fait que $\lim\limits_0 f_0 = 1$ et $\lim\limits_0 f_0' = 0$ (que l'on lit sur l'expression de f_0) on obtient donc

$$f'(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{C}{x}.$$

Soit $b \in]0, a[$. La fonction $x \longmapsto -\frac{C}{x}$ garde un signe constant sur $]0, b]$ et n'est pas intégrable sur $]0, b]$. On en déduit par intégration des relations de comparaison

$$f(x) - f(b) = \int_b^x f'(t) \mathrm{d}t \underset{x \to 0}{\sim} -C \int_b^x \frac{1}{t} \mathrm{d}t = -C(\ln(x) - \ln(b)).$$

On a donc $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} -C \ln(x)$ puis $\lim\limits_0 f = +\infty$.

Notes :

✓ **A l'oral**, 14'04 sans étape 1 mais avec la conclusion faite en note.
✓ La fonction g vue dans la première étape est clairement bornée donc (f_0, g) est liée sur $]0, +\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}^+$ par continuité. En remarquant de plus que $f_0(0) = g(0) = 1$ on conclut que les restrictions de g et f_0 à $\mathbb{R}^+$ sont égales. Enfin , par parité on a même que $f_0 = g$.
✓ On est capable de montrer que (f_0, g) est une base de solution sur $\mathbb{R}$ où g est définie par

$$g(x) = \lim_{\nu \to 0} \frac{f_0(x) \cos(\pi \nu) - f_0(x)}{\sin(\pi \nu)}$$

(Confer cours de FHFS de M1 pour l'étude complète des équations de Bessel).
✓ Plus généralement, on définit l'équation de Bessel d'ordre n par

$$xy'' + xy' + (x^2 - n)y = 0$$

♣ Friedrich Bessel (1784 - 1846) est un astronome et mathématicien allemand, connu principalement pour avoir effectué en 1838 les premières mesures précises de la distance d'une étoile et pour être le fondateur de l'école allemande d'astronomie d'observation.