Prolongement de la fonction Γ d'Euler

<u>Référence :</u> Zuily-Queffélec p.313 pour le Lemme et Objectif Agrégation, exercice 2.10 p. 82 pour la suite

Définition

La fonction Gamma d'Euler est définie sur le demi-plan $\mathscr{P} = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t$$

Lemme

La fonction Γ est holomorphe sur $\mathscr{P}$.

<u>Preuve :</u>
Pour l'holomorphie, il suffit d'appliquer le ***Théorème d'holomorphie sous le signe intégral*** à la fonction

$$(z,t) \mapsto t^{z-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(z-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t}$$

> Soit (X, μ) un espace mesuré, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \mathcal{U} \times X \to \mathbb{C}$. Posons $\forall z \in \mathbb{C}$, $F(z) = \int_X f(z,t)\mathrm{d}\mu(t)$.
> H1) Pour tout $z \in \mathcal{U}$, $t \mapsto f(z,t)$ intégrable.
> H2) Pour presque tout t, $z \mapsto f(z,t)$ holomorphe.
> H3) Pour tout compact K de $\mathcal{U}$, $\exists g \in L^1(X)$ tq $|f(z,t)| \leqslant g(t)$ pour tout $z \in K$ et pour presque tout t.
> Alors F est holomorphe sur $\mathcal{U}$ et, $\forall z \in \mathcal{U}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,t)\mathrm{d}\mu(t)$.

H1) $\forall z \in \mathscr{P}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{(z-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$
H2) $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $z \mapsto \mathrm{e}^{(z-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t}$ est holomorphe sur $\mathscr{P}$
H3) Si K est un compact de $\mathscr{P}$, $\Re(z) \in [\varepsilon, M]$, où $\varepsilon > 0$ et [1]

$$\left|\mathrm{e}^{(z-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t}\right| \begin{array}{lll} \leqslant & \mathrm{e}^{(\varepsilon-1)\ln t} = \dfrac{1}{t^{1-\varepsilon}} & \text{si } 0 < t \leqslant 1 \\ \overset{(\star)}{\leqslant} & t^{M-1}\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 1 \end{array} \quad \text{et ces deux fonctions sont intégrables.}$$

D'où l'holomorphie de Γ. ■

<u>But :</u> montrer qu'il existe une fonction $F(z)$ holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} \ / \ z \neq -n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ qui coïncide avec la fonction $\Gamma(z)$ pour $z \in \mathscr{P}$. Ce prolongement sera encore noté Γ.

1. $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\Re(z)}$

Théorème

Γ se prolonge sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ sans zéro et admet des pôles simples en les $-n, n \in \mathbb{N}$.

__Preuve :__

Etape 1 : montrons que pour tout $z \in \mathscr{P}$, $\Gamma(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.

Découpons l'intégrale définissant Γ de la façon suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$$

On cherche donc à écrire maintenant la première intégrale sous forme d'une série. On développe l'exponentielle :

$$t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$$

Il faut maintenant vérifier que l'on peut bien permuter somme et intégrale avec le théorème de Fubini (appliqué à la mesure produit de la mesure de Lebesgue et de la mesure de comptage).

Remarquons que pour $t > 0$, $|t^z| = \left|\mathrm{e}^{z \ln t}\right| = \mathrm{e}^{\Re(z) \ln t} = t^{\Re(z)}$.

On obtient alors, pour $t \in]0,1]$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| \left|t^{n+z-1}\right| = t^{\Re(z)-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = t^{\Re(z)-1} \mathrm{e}^t$.

Comme $\Re(z) > 0$, $\Re(z) - 1 > -1$ et la fonction $t \to t^{\Re(z)-1} \mathrm{e}^t$ est intégrable[2] sur $]0,1]$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}\right| \mathrm{d}t < +\infty$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini et inverser somme et intégrale.

$$\int_0^1 t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}.$$

On obtient bien, pour tout $z \in \mathscr{P}$,

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$$

Etape 2 : Montrons que $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et que ses pôles sont les entiers négatifs ou nuls et sont simples.

On utilise le ***Théorème sur les séries de fonctions méromorphes*** (cf Cartan pour preuve)

> H1) Soit f_n des fonctions méromorphes.
> H2) Pour tout compact K, $\exists N_K$ tel que, pour $n \geqslant N_K$, les f_n n'ont pas de pôles dans K et $\displaystyle\sum_{n \geqslant N_K} f_n$ CVU sur K.
> Alors $\sum f_n$ est méromorphe et on peut dériver la série terme à terme.

H1) $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n z \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pour seul pôle (simple) $-n$.

H2) Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Il existe $N_K \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \overline{D(0, N_K)}$. Pour $n > N_K$, la fonction f_n n'a pas de pôle dans K.
De plus, pour tout $z \in K$, on a $|z+n| \geqslant n - |z| \geqslant n - N_K$.
Par conséquent, pour tout $z \in K$, $|f_n(z)| \leqslant \dfrac{1}{n!(n-N_K)}$ et donc $\displaystyle\sum_{n > N_K} f_n$ CVN sur K.

Donc, par théorème, f est bien une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les pôles (simples) sont les entiers négatifs.

2. Il s'agit d'une comparaison avec les intégrales de Riemann. On peut dire que c'est $\leqslant \mathrm{e}t^{\Re(z)-1}$ qui est intégrable par Riemann.

Etape 3 : On applique le ***Théorème d'holomorphie sous le signe intégral*** pour conclure.

H1) et H2) sont évidentes pour $f(z,t) = t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}$.
H3) On utilise la majoration ($\star$) faite dans la démonstration du **Lemme**. Et $t \mapsto t^{M-1}\mathrm{e}^{-t} \in L^1([1,+\infty[)$.
Donc $z \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.
Alors,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

établit une prolongement méromorphe de la fonction Γ sur $\mathbb{C}$. Le théorème de prolongement analytique entraîne de plus que c'est le seul prolongement analytique de Γ sur l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

Notes :

✓ **A l'oral**, bla
✓ Rappel : Une fonction est méromorphe sur un ouvert $\mathcal{U}$ s'il existe un ensemble $\mathcal{P}$ de points isolés de $\mathcal{U}$ (appelés pôles de f) tel que f est holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus \mathcal{P}$ (et si, en tout point $p \in \mathcal{P}$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $f(z) \underset{z \to p}{\sim} \dfrac{b}{(z-p)^n}$).
✓ Rappel : (principe de prolongement analytique) Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe. Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous ensemble $D \subset \mathcal{U}$ ayant un point d'accumulation dans $\mathcal{U}$, alors elles sont égales sur $\mathcal{U}$.
♣ Leonhard Euler (1707 - 1783) est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne. Il était notamment membre de l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin. Il fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme la notion de fonction. Il est aussi connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie.