- Exercice 9 :

Montrons que $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| = |xy| \frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2}$$

$$\leq |xy| \frac{|x^2| + |y^2|}{x^2 + y^2} = |xy| \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\leq |xy| \xrightarrow[(x,y) \to 0]{} 0$$

Donc f est continue en $(0,0)$

- Exercice 7 :

- Prenons $(x,y) = (0,t)$, $t > 0$. $f(x,y) = \left|\frac{0}{t}\right| = 0 \xrightarrow[t \to 0]{} 0 \neq 1 = f(0,0)$

Donc f n'est pas continue en $(0,0)$

- Soit $(x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$

$$\leq \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$$

$$\leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2}$$

$$\leq x^2 + y^2 \xrightarrow[(x,y) \to (0,0)]{} 0$$

Donc f est continue en $(0,0)$

- Prenons $(x,y) = (0,t)$ $f(x,y) = \frac{-t^2}{t^2} = -1 \xrightarrow[t \to 0]{} -1 \neq 1$

Donc f n'est pas continue en $(0,0)$

- Soit $(x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |y| \left|\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right|$$

$$\leq |y| \xrightarrow[(x,y) \to (0,0)]{} 0$$

Donc f est continue en $(0,0)$