OM3 - Feuille d'exercices 3 : Fonctions à plusieurs variables, dérivabilité

Exercice 1

On considére les applications suivantes :

— $f\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ /\ (x,y) \longmapsto f(x,y) = (3x, 5x+y)$

— $f\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ /\ (x,y) \longmapsto f(x,y) = (x^2+2y, x-y)$

— $f\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ /\ (x,y) \longmapsto f(x,y) = 8x-2y$

— $f\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3\ /\ (x,y) \longmapsto f(x,y) = (x, 5x+y, y)$

— $f\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ /\ (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (x+5y+z, 2x-7z)$

— $f\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\ /\ (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = 3x-2y+z$

Dire lesquelles sont des applications linéaires, dans le cas échéant, donner la matrice correspondante.

Exercice 2

Soient deux espaces vectoriels $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$, on se donne une base $\mathcal{B}_{\mathbb{E}} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ de $\mathbb{E}$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{F}} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}\}$ de $\mathbb{F}$ ainsi qu'une application linéaire φ de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ dont la matrice relativement à $\mathcal{B}_{\mathbb{E}}$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{F}}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1) On considère dans $\mathbb{E}$ les vecteurs suivants $\vec{e_1}' = \vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{e_2}' = \vec{e_1} + \vec{e_3}$ et $\vec{e_3}' = \vec{e_1} + \vec{e_2}$. Montrer que $\mathcal{B}'_{\mathbb{E}} = \{\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'\}$ est une base. Écrire la matrice de φ si on choisit pour $\mathbb{E}$ cette nouvelle base.
2) Maintenant dans $\mathbb{F}$ on considère les vecteurs $\vec{f_1}' = \vec{f_1} - \vec{f_2}$ et $\vec{f_2}' = \vec{f_1} + \vec{f_2}$. Alors $\mathcal{B}'_{\mathbb{F}} = \{\vec{f_1}', \vec{f_2}'\}$ est une base de $\mathbb{F}$. Donner la matrice de φ relativement aux bases $\mathcal{B}'_{\mathbb{E}}$ et $\mathcal{B}'_{\mathbb{F}}$. Retrouver le résultat à l'aide de la formule de changement de base.

Exercice 3

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes :

$$x^2(\sin y)^2 \quad , \quad x^{y^2} \quad , \quad \exp(x^2+y^2+z^2) \quad , \quad \mathrm{Arctang}(xy) \quad , \quad \mathrm{Arcsin}(x+yz)$$

Exercice 4

Calculer les dérivées partielles de la fonction

$$f(x,y,z) = (x^2+y^3+z^4)\exp(-xyz)$$

Exercice 5

On considère la fonction définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x,y) \longmapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Calculer les dérivées partielles de f en l'origine.
2) Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 6
Soit la fonction f définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x,y) \longmapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)) = \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)) = 0$.
2) Peut-on en déduire que f admet une limite en l'origine ?
3) Calculer les dérivées partielles en l'origine.
4) La fonction f est t-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 7
Soit la fonction f définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x,y) \longmapsto f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \cos\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases}$$

1) La fonction f admet-elle une limite en l'origine ?
2) Peut-on en déduire que les limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y_0)$ et $\lim\limits_{y\to 0} f(x_0,y)$ existent pour tout x_0 ou y_0 constants ?
3) Calculer les dérivées partielles en l'origine de f. Donner la matrice de la jacobienne de f en $(0,0)$.
4) Calculer les dérivées partielles en dehors de l'origine.
5) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 8
Soit la fonction f définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x,y) \longmapsto f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 en l'origine. Donner la matrice de la différentielle de f en $(0,0)$.
2) Calculer les dériveées partielles d'ordre 1 en dehors de l'origine.
3) En déduire les valeurs de :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

4) Que peut-on en conclure ?

Exercice 9
On considère les applications suivantes

$$f \ : \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ / \ (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (2x^2y + y^3z^2, xyz)$$

et

$$g \ : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \ / \ (x,y) \longmapsto g(x,y) = (\sin xy, \cos(x+y), x^2y, x-y)$$

Calculer la différentielle de f au point $(2,1,-1)$ et la différentielle de g au point $(\pi/4, \pi/2)$

Exercice 10
On considère la fonction f définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x,y) \longmapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5y - xy^5}{x^4+y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur le plan tout entier.
2) Est-elle différentiable en $(0,0)$?
3) Calculer les valeurs de :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$
4) Que peut-on en déduire sur la continuité en l'origine de :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
5) Les fonctions dérivées partielles d'ordre 1 sont-elles différentiables en l'origine ?

Exercice 11
Soit la fonction f définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x,y) \longmapsto f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right) & \text{si} \quad x-y \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x-y = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est différentiable en l'origine et donner sa différentielle en ce point.
2) Calculer :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$
3) En déduire que l'une au moins des dérivées partielles
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
n'est pas continue en l'origine.

Exercice 12
Le système de coordonnées sphériques relie les coordonnées d'espace (x, y, z) à la longitude θ, la collatitude φ et la distance r de (x, y, z) à l'origine par les formules :

$$x = r\cos\theta\sin\varphi \quad , \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad , \quad z = r\cos\varphi$$

Des données expérimentales montrent que la viscosité dynamique μ de l'océan suit la loi exponentielle :

$$\mu = \mu_0 \exp(-b_0 T)$$

où $T = T(x, y, z, t)$ est la température de l'eau au point (x, y, z) et à la date t.
Calculer les dérivées partielles de μ en fonction de r, θ, φ, et de T et de ses dérivées partielles $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$, $\partial T/\partial z$ et $\partial T/\partial t$.

Exercice 13
On considère les deux applications définies comme suit

$$f \ : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ / \ (x, y) \longmapsto f(x, y, z) = (2x^2 + y, xy^2, x - y)$$

et

$$g \ : \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x, y, z) \longmapsto g(x, y) = x + \sin 3(y - 4) + \cos\frac{\pi}{2}z$$

Calculer la différentielle de $g \circ f$ au point $(1, 2)$ et retrouver le résultat en utilisant les jacobiennes de f et g.

Exercice 14
Soit $z = z(x, y)$ la fonction définie implicitement par la relation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Calculer les dérivées partielles $\partial z/\partial x$ et $\partial z/\partial y$.

Exercice 15
Soit une fonction F à une variable dérivable.
On considère la relation :

$$\frac{z}{x} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Montrer que l'équation :

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

est toujours satisfaite indépendamment du choix de la fonction F.

Exercice 16
Soit l'équation :

$$z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$$

Montrer que l'équation :

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z}$$

est toujours vérifiée.

Exercice 17
Calculer la dérivée de la fonction $z(x, y) = 5x^2 - 3x - y - 1$ au point $M = (2, 1)$ suivant la direction de la droite joignant ce point au point $N = (5, 5)$.