OM3 - Feuille d'exercices 4 :
Fonctions à plusieurs variables, dérivées d'ordre supérieur

Exercice 1
Soit un gaz donné.
On note P sa pression, T sa température, V son volume spécifique et N le nombre de particules.
L'équation de Viriel peut s'écrire pour des grandes valeurs de V :

$$\frac{PV}{RT} = N\left(1 + \frac{a}{V} + \frac{b}{V^2}\right)$$

où R est la constante universelle des gaz parfaits, a et b des constantes expérimentales.
On suppose N fixé.
Calculer :

$$\frac{\partial V}{\partial P} \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial T}$$

Exercice 2
Montrer que la fonction $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ satisfait à l'équation $\Delta u = 0$ où Δ désigne le laplacien.
On dit alors que u est une fonction harmonique.

Exercice 3
Soient deux fonctions à une variable φ et ψ de classe $\mathcal{C}^2$ et a une constante non nulle donnée.
On considère la fonction définie comme suit :

$$z = z(t, x) = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$$

où a a la dimension d'une vitesse, t un temps et x une longueur.
Montrer que la fonction z satisfait la relation :

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

Exercice 4
Soit une fonction à une variable f de classe $\mathcal{C}^2$.
On considère la fonction à deux variables $F(x, y) = f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.
Montrer l'égalité :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r}f'(r)$$

Exercice 5
Soit une fonction à deux variables f de classe $\mathcal{C}^2$.
On considère la fonction à deux variables $F(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ qui correspond donc à un changement en coordonnées polaires.
Montrer que l'on a la relation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

Exercice 6
On considère une fonction inconnue $g = g(x, y)$ à deux variables de classe $\mathcal{C}^2$.
Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \; + \; 2xy \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \; + \; y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \; = \; 0$$

en considérant la nouvelle fonction inconnue $f = f(u, v)$ et le changement de variable $g = g(x, y) = f(u(x, y) = x, v(x, y) = y/x)$.

Exercice 7
Même question que l'exercice précédent avec l'équation :

$$x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \; - \; y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \; + \; x \frac{\partial g}{\partial x} \; - \; y \frac{\partial g}{\partial y} \; = \; 0$$

ainsi que la nouvelle fonction inconnue $f = f(u, v)$ et le changement de variable $g = g(x, y) = f(u(x, y) = xy, v(x, y) = y/x)$.

Exercice 8
Déterminer la divergence et le rotationnel de chacun des champs de vecteurs suivants :

$\overrightarrow{A}(x, y, z) = z \, \overrightarrow{i} + y \, \overrightarrow{j} + x \, \overrightarrow{k}$

$\overrightarrow{B}(x, y, z) = y \, \overrightarrow{i} + \exp\left(-x^2 + y^2 + z^2\right) \overrightarrow{j} + \cos(xyz) \, \overrightarrow{k}$

$\overrightarrow{C}(x, y, z) = \text{Arctang}(x + y + z) \, \overrightarrow{i} - (x^2 + y^2 + z^2) \, \overrightarrow{j} + \dfrac{1}{xyz} \overrightarrow{k}$

Exercice 9
Soit le champ de vecteur $\overrightarrow{F}(x, y, z) = x \, \overrightarrow{i} + y \, \overrightarrow{j} + z \, \overrightarrow{k}$.

Calculer $\nabla \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{F})$ et déterminer une fonction U à valeurs réelles telle que :

$$\overrightarrow{F} = \nabla U = \overrightarrow{\text{grad}} \, U = (\partial U / \partial x \, , \partial U \, , \partial y \, , \partial U / \partial z)$$

Exercice 10
Soit le champ de vecteur $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \dfrac{1}{r^3}(x \, \overrightarrow{i} + y \, \overrightarrow{j} + z \, \overrightarrow{k}), \;\; r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Calculer $\nabla \cdot \overrightarrow{F} = \text{div} \overrightarrow{F}$ et trouver une fonction U telle que $\overrightarrow{F} = \nabla U$.

Exercice 11
Soit $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ un champ électromagnétique dans le vide satisfaisant les équations de Maxwell

$$\nabla \cdot \overrightarrow{E} = 0 \quad , \quad \nabla \wedge \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0, \quad \nabla \wedge \overrightarrow{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

où c désigne la vitesse de la lumière.
Montrer que ce champ vérifie les équations :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} - \Delta \overrightarrow{E} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} - \Delta \overrightarrow{B} = 0$$

Exercice 12
Soient un champ scalaire $\rho = \rho(x, y, z)$ et deux champs de vecteurs $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}(x, y, z)$, $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W}(x, y, z)$.
Démontrer les formules suivantes :

$$\nabla \cdot (\overrightarrow{X_0} \wedge \overrightarrow{V}) = -\overrightarrow{X_0} \cdot (\nabla \wedge \overrightarrow{V})$$

$$\nabla \wedge (\rho \overrightarrow{V}) = \rho(\nabla \wedge \overrightarrow{V}) + \nabla \rho \wedge \overrightarrow{V}$$

$$\nabla \cdot (\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}) = -\overrightarrow{V} \cdot (\nabla \wedge \overrightarrow{W}) + \overrightarrow{W} \cdot (\nabla \wedge \overrightarrow{V})$$

$$\nabla \cdot (\rho \overrightarrow{V}) = \rho \nabla \cdot \overrightarrow{V} + \nabla \rho \cdot \overrightarrow{V}$$

où $\overrightarrow{X_0}$ est un vecteur constant.