Outils Mathématiques 3
L2 PCSTM

Introduction

Outils mathématiques 3 - L2 PCSTM

* **Thèmes abordés:**
  - Suites et séries numériques
  - Suites et séries de fonctions (rudiments, non évalué)
  - Fonctions de plusieurs variables: domaine de définition, limites et continuité.
  - Fonctions de plusieurs variables: calcul différentiel
  - Courbes et surfaces de niveau (bases)
* **Contrôles continus:** prévus les:
  - 28/09/2023
  - 09/11/2023
  - 30/11/2023

  Règle de calcul de la note à l'UE:

$$Note = Max\left\{\frac{CC1+2CC3}{3}, \frac{CC2+2CC3}{3}, \frac{CC1+CC2+CC3}{3}\right\}$$

Table des matières

Partie I

Suites et séries

Chapitre 1

Suites et séries numériques

1.1 Suites numériques

1.1.1 Vocabulaire

Définition (Suite numérique)

Une **suite numérique** correspond à un la donnée de nombre réels (ou complexes) indexés par un nombre entier $u_0, u_1, u_2, \cdots$. On la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n). On note respectivement $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ les ensembles des suites réelles et complexes.

Remarque. *Il s'agit d'une fonction* $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ *avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Définition (Vocabulaire usuel)

Une suite numérique $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (réelle) est dite:

- ⋆ **Minorée** si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $m \leqslant u_n$
- ⋆ **Majorée** si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant M$
- ⋆ **Bornée** si il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n| \leqslant M$
- ⋆ **Positive (resp. strictement positive)** si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geqslant 0$ (resp. $u_n > 0$).
- ⋆ **Négative (resp. strictement négative)** si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant 0$ (resp. $u_n < 0$).
- ⋆ **Croissante (resp. strictement croissante)** si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$).
- ⋆ **Décroissante (resp. strictement décroissante)** si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \leqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).

Remarque. (u_n) *est dite* ***monotone (resp. strictement monotone)*** *si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).*

Exemple. *La suite* $(\sin(n))$ *est bornée. La suite* $\left(\frac{1}{n}\right)$ *est décroissante et minorée par* 0.

1.1.2 Limite d'une suite

1.1.2.1 Définitions et premières propriétés

Définition (Suite convergente)

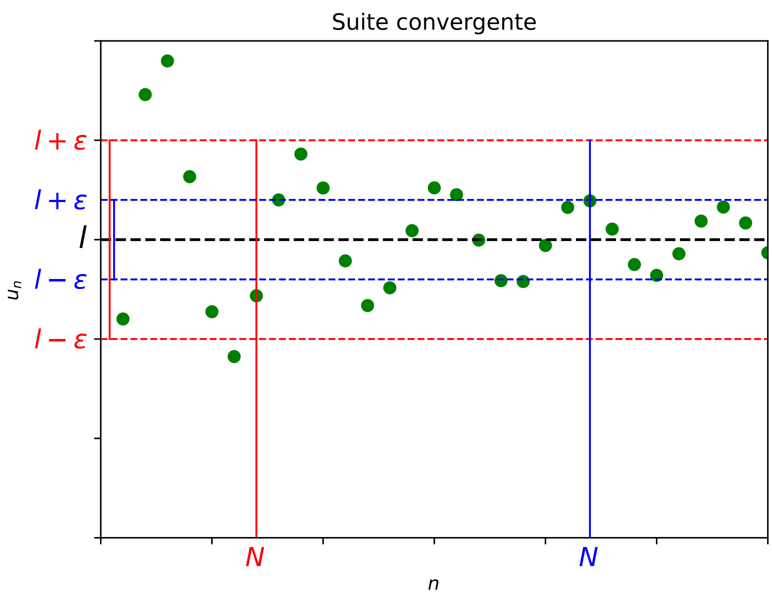
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge (ou est dite convergente)** s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$: $|u_n - l| < \varepsilon$. le nombre l est appelé **limite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = l \tag{1.1}$$

ou encore:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \tag{1.2}$$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge (ou qu'elle est divergente)** si elle ne converge pas.



Remarque. *Il arrive que l'on veuille simplement savoir si une suite converge ou non, sans chercher à connaître sa limite.*

Exemple. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge.* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Proposition (Propriétés d'une suite convergente)

- ⋆ Si une suite est convergente, alors elle admet une limite unique.
- ⋆ Si une suite est convergente, alors elle est bornée.
- ⋆ Toute suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) converge.
- ⋆ Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $l \in \mathbb{R}$, alors toute sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ets convergente de même limite l ($\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante appelée extraction).

Exemple. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. En effet, si elle convergeait, alors les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeraient vers la même limite, or, elles convergent respectivement vers 1 et -1. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.*

Proposition (Propriétés d'une suite convergeant vers 0)

- ⋆ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Alors:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0 \tag{1.3}$$

- ⋆ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques, avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée. Alors:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 0 \tag{1.4}$$

Exemple. *Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. On a:*

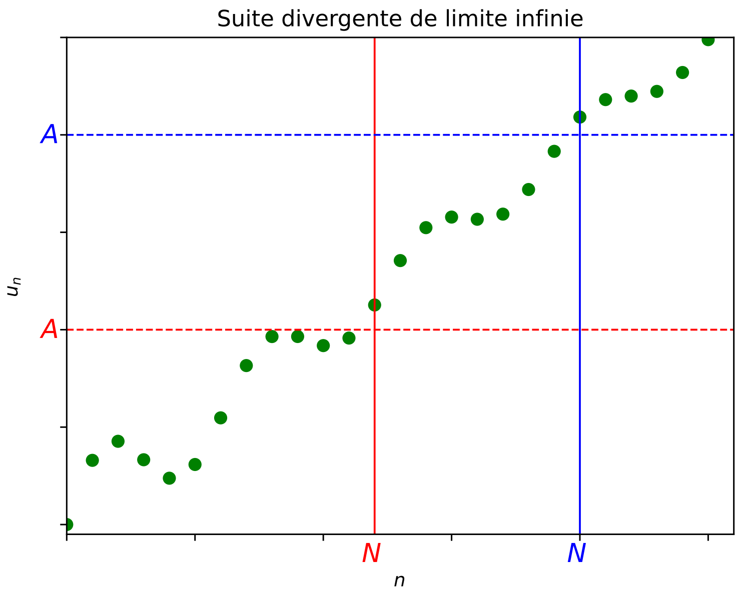
$$\begin{aligned} |u_n| &= \frac{|(-1)^n|}{n} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned} \tag{1.5}$$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Définition (Limite infinie d'une suite)

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$)** si, pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > N$, $u_n > A$ (resp. $u_n < -A$). On note:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty \text{ (resp. } -\infty). \tag{1.6}$$



Exemple. *La suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et admet pour limite $+\infty$*

Remarque. *Si une suite admet une limite, alors elle vaut soit un nombre fini, soit $+\infty$, soit $-\infty$.*

1.1.2.2 Opérations sur les limites

Dans ce paragraphe, on considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettant une limite. FI signifie "Forme indéterminée", autrement dit, on ne peut rien dire sur le résultat.

⋆ **Somme:**

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$	l	l ou $+\infty$	l ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (u_n+v_n)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemple. *Contre-exemple à la forme indéterminée pour la somme:*

⋆ *Si $u_n = n^2$ et $v_n = -n$, alors $u_n + v_n = n^2 - n \longrightarrow +\infty$ lorsque $n \to +\infty$*

⋆ *Si $u_n = n^2$ et $v_n = -n^3$, alors $u_n + v_n = n^2 - n^3 \longrightarrow -\infty$ lorsque $n \to +\infty$*

⋆ **Produit:**

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$	l	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (u_n v_n)$	ll'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI

Exemple. *Contre-exemple à la forme indéterminée pour le produit:*

⋆ *Si $u_n = n^2$ et $v_n = \frac{1}{n}$, alors $\frac{u_n}{v_n} = n \longrightarrow +\infty$ lorsque $n \to +\infty$*

⋆ *Si* $u_n = n^2$ *et* $v_n = \frac{1}{n^3}$*, alors* $\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \to +\infty$

⋆ **Multiplication par un réel:**

	$\lambda > 0$			$\lambda = 0$	$\lambda < 0$		
$\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$	$+\infty$	l	$-\infty$	l, $+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	l	$-\infty$
$\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$	$+\infty$	λl	$-\infty$	l, $+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$	λl	$+\infty$

⋆ **Inverse:**

$\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$	$l \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 et $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geqslant N$, $u_n > 0$	0 et $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geqslant N$, $u_n < 0$	0 (autres cas)
$\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_n}\right)$	$\frac{1}{l}$	0	$+\infty$	$-\infty$	FI

Remarque. *Les troisième et quatrième colonnes du tableau signifient que si une suite admet une limite nulle tout en étant strictement positive (resp. strictement négative)* ***à partir d'un certain rang****, alors son inverse admet pour limite* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*).*

Exemple. *Contre-exemple à la forme indéterminée pour l'inverse: Prenons* $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$*. On sait que* $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ *mais* u_n *change de signe selon la parité de* n*. On a* $\frac{1}{u_n} = n \cdot (-1)^n$*, et cette suite n'a pas de limite lorsque* $n \to +\infty$

1.1.2.3 Limites et inégalités

Proposition (Limites et comparaison de suites)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

- ⋆ Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$ et $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l'$ alors on a $l \leqslant l'$
- ⋆ Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- ⋆ Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Remarque. *Cette proposition reste vraie si, à partir d'un certain rang, on a* $u_n < v_n$ *(inégalité stricte), mais, et* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *admettent pour limite respective* l *et* l'*, alors on aura toujours* $l \leqslant l'$*, et pas forcément* $l < l'$*.*

Exemple. *Prenons* $u_n = \frac{1}{2n}$ *et* $v_n = \frac{1}{n}$*. On a* $u_n < v_n$ *pour tout* $n > 0$*, mais, en passant à la limite, ces deux suites sont de limite nulle.*

Remarque. *En particulier, si il existe* $m \in \mathbb{R}$ *tel que* $m \leqslant v_n$ *à partir d'un certain rang, alors, si* $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l'$*, on a* $m \leqslant l'$*, et idem dans le cas où il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que* $u_n \leqslant M$

Théorème (Limites et encadrement)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites numériques telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang.

- ⋆ Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l'$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors on a:

$$l \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n \leqslant l' \tag{1.7}$$

- ⋆ **Théorème des gendarmes:** Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a:

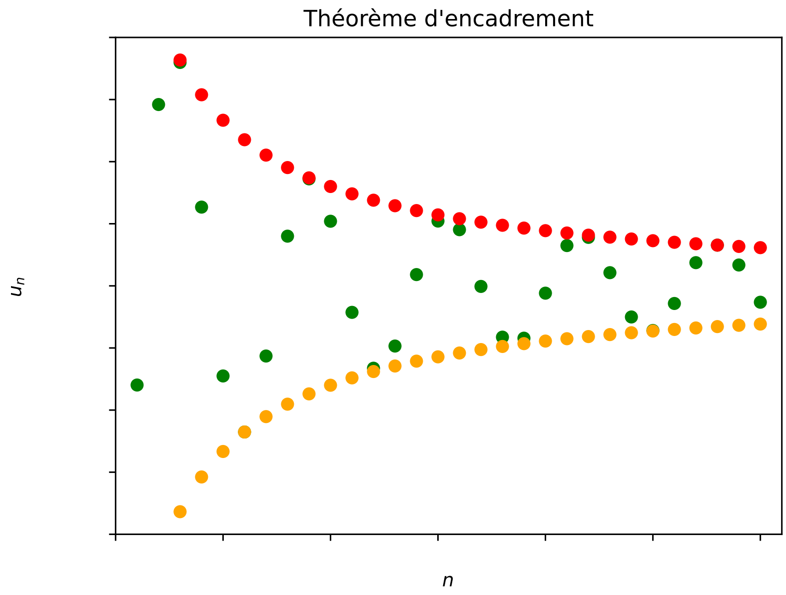
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = l \tag{1.8}$$

Remarque. *Ce théorème reste valable lorsque les inégalités sont strictes, par exemple $u_n < v_n < w_n$ à partir d'un certain rang, mais les limites ne vérifient en général pas ces inégalités strictes, autrement dit, en général, lorsque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l'$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on n'a pas cette inégalité stricte:*

$$l < \lim_{n\to+\infty} v_n < l' \tag{1.9}$$

Exemple. *Prenons $u_n = -5 - \frac{1}{n}$, $v_n = -5 + \frac{\sin(n)}{n}$ et $w_n = -5 + \frac{1}{n}$. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$, donc on a $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par encadrement, on a la limite suivante:*

$$-5 + \frac{\sin(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -5 \tag{1.10}$$



1.1.3 Méthodes pour étudier une suite

1.1.3.1 Suites classiques, croissances comparées

Proposition (Suites polynomiales)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a:

$$n^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha < 0 \\ 1 & \text{si} \quad \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha > 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

Proposition (Suites géométriques)

Soit $a \in \mathbb{R}$:

- ⋆ Si $a \leqslant -1$, alors la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et n'a pas de limite.
- ⋆ Si $a > -1$, alors la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

$$a^{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |a| < 1 \\ 1 & \text{si} \quad a = 1 \\ +\infty & \text{si} \quad a > 1 \end{cases} \tag{1.12}$$

Théorème **(Croissances comparées)**

On a, pour tous $\alpha, \beta > 0$, $a > 1$, les limites suivantes:

- ⋆ $\frac{\ln(n)^\alpha}{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- ⋆ $\frac{n^\alpha}{a^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- ⋆ $\frac{a^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

1.1.3.2 Suites équivalentes

Définition **(Suites équivalentes)**

On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **équivalentes** si il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = v_n(1+\varepsilon_n) \tag{1.13}$$

Si u_n et v_n sont non nuls à partir d'un certain rang, la définition est équivalente à dire que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \tag{1.14}$$

On note:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \tag{1.15}$$

Exemple. *Si on prend $u_n = n^3 + n^2 + sin(n)$, alors on a :*

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{n^3} &= \frac{n^3+n^2+sin(n)}{n^3} \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{\sin(n)}{n} \end{aligned}$$

Les second et troisième termes sont de limite nulle, donc $\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$.

Remarque. *Regarder une suite équivalente lorsque l'on a plusieurs termes, c'est trouver quel sera le terme prépondérant, celui qui sera le plus gros lorsque n est grand. Si on veut faire un lien avec la physique, en reprenant notre exemple précédent, on peut tester avec des valeurs explicites de n. Par exemple, lorsque $n = 10$, on a $u_{10} = 10^3+10^2+\sin(10)$. Les second et troisième termes sont négligeables devant le permier, ce qui confirme l'équivalent $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$. Avec $n = 10^2$, on a $u_{100} = 10^6 + 10^4 + \sin(100)$, ce qui confirme bien. On peut tester avec des valeurs de n de plus en plus grandes, cela marchera toujours.*

Proposition (Opérations sur les équivalents)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$. On a alors:

- ⋆ **Produit:** $u_n x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n y_n$
- ⋆ **Quotient:** Si x_n est non nul à partir d'un certain rang, alors c'est aussi le cas pour y_n et on a $\frac{u_n}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{y_n}$
- ⋆ **Puissance:** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi positive à partir d'un certain rang. En particulier, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$

Remarque. *En pratique, pour connaître un équivalent d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$, donc u_n et v_n sont constitués des plusieurs termes, on procède le plus souvent de cette manière:*

- ⋆ *On trouve un équivalent des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en regardant le plus gros terme.*
- ⋆ *L'équivalent se déduit grâce à la régle du quotient*

Exemple. *Prenons $u_n = \frac{n^3+n^2+\sin(n)}{n^4-\sqrt{n}}$.*

- ⋆ *On sait que dans l'expression $n^3+n^2+\sin(n)$, le terme prépondérant est n^3 (on peut le montrer en étudiant l'expression $\frac{n^3+n^2+\sin(n)}{n^3}$, donc $n^3+n^2+\sin(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$.*
- ⋆ *De plus, un raisonnement similaire montre que $n^4+\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^4$*
- ⋆ *Finalement, on applique la règle du quotient, donnant ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, soit:*

$$\frac{n^3+n^2+\sin(n)}{n^4-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \tag{1.16}$$

Application (Quotient de polynômes)

Soient $a_0, \cdots, a_p, b_0, \cdots, b_q \in \mathbb{R}$ avec $a_p, b_q \neq 0$ (p, q entiers).
On a alors:

$$\frac{a_0 + \cdots + a_p n^p}{b_0 + \cdots + b_q n^q} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p < q \\ \frac{a_p}{b_q} & \text{si} \quad p = q \\ +\infty & \text{si} \quad p > q \end{cases} \tag{1.17}$$

On a cet équivalent:

$$\frac{a_0 + \cdots + a_p n^p}{b_0 + \cdots + b_q n^q} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{a_p}{b_q} n^{p-q} \tag{1.18}$$

1.1.3.3 Utilisation d'un développement limité

Proposition (Développement asymptotique)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique de limite nulle, et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant le développement limité suivant au voisinage de 0:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + \underset{x \to 0}{o}(x^p) \tag{1.19}$$

alors on a:

$$f(u_n) = a_0 + a_1 u_n + \cdots + a_p u_n^p + \underset{n \to +\infty}{o}(u_n^p) \tag{1.20}$$

Exemple. *Soit $x \in]-1, 1[$, et posons $u_n = (1 + \frac{x}{n})^n$. On a alors:*

$$\begin{aligned} u_n &= e^{n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)} \\ &= e^{n\left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{x^2}{n^2}\right)\right)} \\ &= e^{x - \frac{x^2}{2n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{x^2}{n}\right)} \end{aligned}$$

D'où:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^x \tag{1.21}$$

1.1.3.4 Critères de d'Alembert et de Cauchy

Proposition (Critère de d'Alembert)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique dont aucun terme ne s'annule, telle que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l \tag{1.22}$$

- ⋆ Si $0 \leqslant l < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- ⋆ Si $l > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
- ⋆ Si $l = 1$, alors on ne peut pas conclure.

Exemple. *Contre-exemple au cas où $l = 1$.*

- ⋆ *Prenons $u_n = \frac{1}{n}$, alors on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*
- ⋆ *Prenons $u_n = n$, alors on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée.*

Proposition (Critère de Cauchy)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique dont aucun terme ne s'annule, telle que:

$$\lim_{n\to+\infty}|u_n|^{\frac{1}{n}} = l \tag{1.23}$$

- ⋆ Si $0 \leqslant l < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- ⋆ Si $l > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
- ⋆ Si $l = 1$, alors on ne peut pas conclure.

Exemple. *Contre-exemple au cas où $l = 1$.*

- ⋆ *Prenons $u_n = 1$, alors on a $|u_n|^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*
- ⋆ *Prenons $u_n = n$, alors on a $u_n^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(n)}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée.*

1.2 Séries numériques

1.2.1 Définitions et premières propriétés

Dans cette section, nous étudierons que les séries à **termes positifs**.

Définition (Série numérique)

- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique positive. On appelle **série de terme général** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite, notée $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et définie par:

$$\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \tag{1.24}$$

  La suite $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **suite des sommes partielles**.

- On dit que la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **série convergente** si la suite de ses sommes partielles est convergente. Une série non convergente sera dite **divergente**.

- Lorsqu'une série est convergente, le nombre S donné par:

$$S := \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \tag{1.25}$$

  est appelé **somme de la série**.

Remarque. *Le but de cette section est de déduire la nature d'une série en étudiant son terme général.*

Proposition (Sommes partielles)

Une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Définition-Théorème (Divergence grossière)

Si une série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, on dit que la série $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge grossièrement**.

Exemple. *La série de terme général* 1 *diverge grossièrement.*

1.2.2 Séries de références

Proposition (Séries géométriques)

Soit $a \geqslant 0$.

- ⋆ Pour $a \neq 1$, La suite des sommes partielle d'ne série géométrique est égale à:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \tag{1.26}$$

et cette somme vaut $n+1$ si $a = 1$.

- ⋆ Si $a < 1$, alors la série $\left(\sum a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{1-a}$.
- ⋆ Si $a \geqslant 1$, alors la série $\left(\sum a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge grossièrement.

Proposition (Séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- ⋆ Si $\alpha \leqslant 0$, alors la série $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge grossièrement.
- ⋆ Si $0 < \alpha \leqslant 1$, alors la série $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- ⋆ Si $\alpha > 1$, alors la série $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Remarque. *Dans le cas d'une série de Riemann, le terme général commence à $n = 1$.*

Exemple. *La série $\left(\sum \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente, tandis que la série $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente (sa somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$, sa valeur a été trouvée par Euler en 1735).*

1.2.3 Comparaison de séries

Proposition (Comparaison de séries)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs.

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature (convergente ou divergente)
2. Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente.
3. Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente alors $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi divergente.

Remarque. *Pour déterminer la nature d'une série, on cherchera d'abord à comparer son terme général avec une suite connue et à en déduire la nature par comparaison avec une série de référence (géométrique, Riemann).*

Exemple. *On sait que, par croissance comparée,* $\frac{2^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*, donc, à partir d'un certain rang,* $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$*. Par comparaison avec une série géométrique, la série* $\left(\sum \frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc convergente.*

1.2.4 Règles de d'Alembert et Cauchy

Proposition (Règle de d'Alembert)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique positive dont aucun terme ne s'annule, telle que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \tag{1.27}$$

- ⋆ Si $0 \leqslant l < 1$, alors $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- ⋆ Si $l > 1$, alors $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- ⋆ Si $l = 1$, alors on ne peut pas conclure.

Exemple. *Contre-exemple au cas où* $l = 1$*.*

- ⋆ *Prenons* $u_n = \frac{1}{n}$*, alors on a* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$*. La série* $\left(\sum \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est divergente.*
- ⋆ *Prenons* $u_n = \frac{1}{n^2}$*, alors on a* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$*. La série* $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente.*

Proposition (Règle de Cauchy)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique dont aucun terme ne s'annule, telle que:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = l \tag{1.28}$$

- ⋆ Si $0 \leqslant l < 1$, alors $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- ⋆ Si $l > 1$, alors $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- ⋆ Si $l = 1$, alors on ne peut pas conclure.

Exemple. *Contre-exemple au cas où* $l = 1$*.*

- ⋆ *Prenons* $u_n = \frac{1}{n}$*, alors on a* $u_n^{\frac{1}{n}} = n^{-\frac{1}{n}} = e^{-\frac{\ln(n)}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$*. La série* $\left(\sum \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est divergente.*
- ⋆ *Prenons* $u_n = \frac{1}{n^2}$*, alors on a* $u_n^{\frac{1}{n}} = n^{-\frac{2}{n}} = e^{-\frac{2\ln(n)}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$*. La série* $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente.*

Chapitre 2

Suites et séries de fonctions

2.1 Définitions et modes de convergence

Définition (Suite et série de fonctions)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- $\star$ On appelle **suite de fonctions**, notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, toute suite de fonctions $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que, pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique (réelle).
- $\star$ On appelle **série de fonctions**, notée $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ toute série telle que pour tout $x \in I$, la série $\left(\sum f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une série numérique.

Définition (Convergence d'une suite de fonctions)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- $\star$ On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ si pour tout $x \in I$:

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) \tag{2.1}$$

- $\star$ On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ si:

$$\underset{x\in I}{Sup}\,|f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.2}$$

Exemple. *La suite de fonctions donnée par $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ converge simplement vers la fonction nulle, mais pas uniformément. La convergence est en revanche uniforme sur un segment.*

Définition (Convergence d'une série de fonctions)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- On dit que la série de fonctions $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers la fonction $S : I \longrightarrow \mathbb{K}$ si pour tout $x \in I$:

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S(x) \tag{2.3}$$

- On dit que la série de fonctions $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers la fonction $S : I \longrightarrow \mathbb{K}$ si:

$$\underset{x\in I}{Sup}\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - S(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.4}$$

- On dit que la série de fonctions $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge normalement** si la série numérique

$$\left(\sum_{k=0}^{n} ||f_k||_{L^\infty(I)}\right)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\sum_{k=0}^{n} \underset{x\in I}{Sup}|f_k(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}} \tag{2.5}$$

converge.

Théorème (Propriétés de la convergence)

- Si une suite ou série de fonction converge uniformément, alors elle converge simplement.
- La convergencve uniforme préserve la continuité à la limite, autrement dit, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction f, alors f est continue. Ce résultat s'applique à une série de fonctions.
- Si une série de fonctions converge normalement, alors elle converge uniformément.

Remarque. *Etudier la convergence normale permet de se ramener à l'étude d'une série numérique.*

Exemple. *La série de fonction $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où, pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ converge normalement. On peut même prouver que sa limite est e^x, ce qui donne bien une fonction continue.*

2.2 Séries de Fourier

Définition (Coefficient et série de Fourier)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $2\pi-$périodique.

- ⋆ On définit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ son **n-ième coefficient de Fourier** par:

$$c_n(f) \quad := \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x \tag{2.6}$$

- ⋆ On définit la **série de Fourier associée à f** comme étant la série de fonctions suivante, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(\sum f_n(x) \right)_{n \in \mathbb{Z}} \quad := \quad \left(\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx} \right)_{n \in \mathbb{N}} \tag{2.7}$$

avec, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in [0, 2\pi]$: $f_n(x) = c_n(f) e^{inx}$.

Remarque. *On peut voir la série de fonction indexée sur $\mathbb{Z}$ comme ceci:*

$$\left(\sum f_n(x) \right)_{n \in \mathbb{Z}} \quad = \quad \left(f_0(x) + \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + \sum_{k=1}^{n} f_{-k}(x) \right) \tag{2.8}$$

Proposition (Convergence d'une série de Fourier)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $2\pi-$périodique de classe $\mathcal{C}^2$. Alors la série de Fourier associée à f converge normalement (donc uniformément) vers f.

Application (Phénomène de Gibbs)

La proposition précédente garantit que si l'on cherche à reconstituer une fonction périodique de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ à l'aide de sa série de Fourier, alors le phénomène de de Gibbs ne va pas se produire, car ce phénomène est propre aux séries de Fourier convergeant simplement mais non uniformément.

Partie II

Fonctions de plusieurs variables

Chapitre 3

Limites et continuité

Dans tout le chapitre, d désigne un entier naturel non nul, qui est la dimension de l'espace dans lequel on travail, et aussi le nombre de variables des fonctions que l'on va étudier.

3.1 Domaines de $\mathbb{R}^d$

3.1.1 Normes de $\mathbb{R}^d$

Définition (Norme)

On appelle **norme** toute application $N : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant ces trois propriétés:

- $\star$ **Séparation:** Si $x \in \mathbb{R}^d$ et $N(x) = 0$ alors $x = 0$.
- $\star$ **Homogénéité:** Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^d$, alors $N(\lambda \cdot x) = |\lambda| N(x)$
- $\star$ **Inégalité triangulaire:** Si $x, y \in \mathbb{R}^d$, alors $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$

Exemple. *Voici les exemples les plus classiques de normes en dimension finie.*

- $\star$ ***Norme euclidienne:*** $||x||_{l^2} := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$
- $\star$ ***Norme** 1 **(ou norme de Manhattan):*** $||x||_{l^1} := |x_1| + \cdots + |x_d|$
- $\star$ ***Norme infinie:*** $||x||_{l^\infty} := \underset{k \in [\![1,n]\!]}{Max} |x_k|$

Définition (Normes équivalentes)

Soient $N_1, N_2 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ deux normes. On dit que N_1 et N_2 sont **équivalentes** si ils existent deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$C_1 N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant C_2 N_1(x) \tag{3.1}$$

Théorème (Normes équivalentes en dimension finie)

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Remarque. *Cela signifie que dans notre cas où l'on travaille sur $\mathbb{R}^d$, nous pouvons prendre n'importe quelle norme, notamment pour un calcul de limite, une notion de continuité où de différentiabilité.*

3.1.2 Ouverts et fermés

Dans cette sous-section, on travaillera avec la norme euclidienne que l'on notera $||\cdot||$

Définition (Boule ouverte et boule fermée)

Soit $a \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$. On appelle:

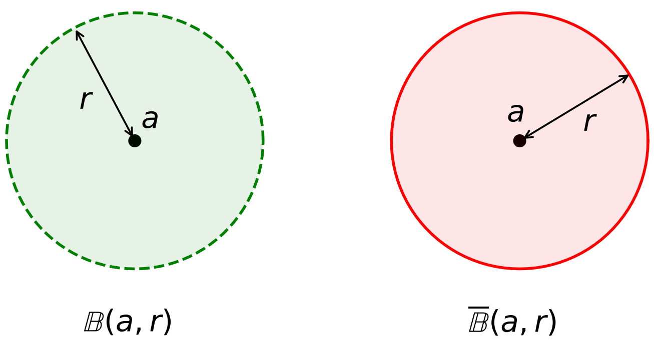
- ⋆ **Boule ouverte de centre a et de rayon r** l'ensemble:

$$\mathbb{B}(a,r) \quad := \quad \left\{x \in \mathbb{R}^d : ||x-a|| < r\right\} \tag{3.2}$$

- ⋆ **Boule fermée de centre a et de rayon r** l'ensemble:

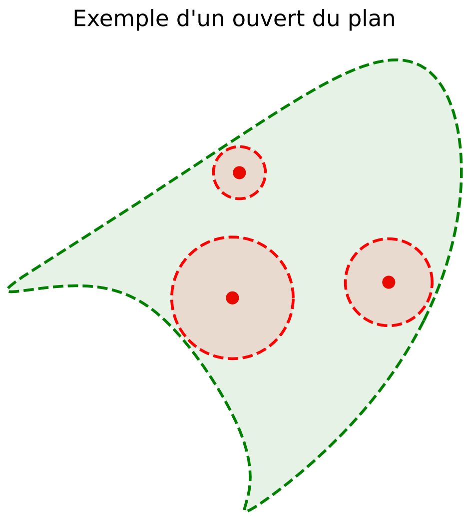
$$\overline{\mathbb{B}}(a,r) \quad := \quad \left\{x \in \mathbb{R}^d : ||x-a|| \leqslant r\right\} \tag{3.3}$$

Boule ouverte et boule fermée



Définition **(Ouvert et fermé)**

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. On dit que Ω est un **ouvert de** $\mathbb{R}^d$ si pour tout $a \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $\mathbb{B}(a, r) \subset \Omega$. Un ensemble est dit **fermé** si son complémentaire est ouvert.



Exemple. *Voici quelques exemples d'ouverts ou de fermés:*

- ⋆ *Les boules ouvertes sont des ouverts de* $\mathbb{R}^d$*, les bnoules fermées sont des fermés de* $\mathbb{R}^d$*.*
- ⋆ *Un ensemble de la forme* $]a, b[\times]c, d[$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$*.*
- ⋆ *Le complémentaire d'une boule fermée est un ouvert, en particulier, si* $a \in \mathbb{R}^d$*,* $\mathbb{R}^d \setminus \{a\}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^d$*.*
- ⋆ $\mathbb{R}^d$ *est ouvert dans* $\mathbb{R}^d$*.*

3.1.3 Domaine de définition d'une fonction

Dans cette sous-section, nous allons voir comment déterminer le domaine de définition d'une fonction de plusieurs variables.

Le domaine de définition d'une fonction de plusieurs variables et le domaine de $\mathbb{R}^d$ sur lequel la fonction est bien définie, et en dehors duquel cette même fonction ne peut pas être correctement définie.

Exemple. *Voici quelques exemples en une dimension.*

- ⋆ *Le domaine de définition de la fonction* $x \mapsto \ln(x)$ *est* $]0, +\infty[$*.*
- ⋆ *Le domaine de définition de la fonction* $x \mapsto \sqrt{x}$ *est* $[0, +\infty[$*.*

- *Le domaine de définition de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *est* $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Avec plusieurs variables, l'idée est que si l'on rencontre des expressions de la forme $F(f(x_1, \cdots, x_d))$ où F est une fonction à une variable, alors $f(x, y)$ doit rester dans le domaine de définition de F.

Exemple. *Plusieurs exemples en plusieurs dimensions:*

- *Pour que la fonction* $(x_1, \cdots, x_d) \mapsto \ln(f(x_1, \cdots, x_d))$ *soit correctement définie, il faut que* $f(x_1, \cdots, x_d) > 0$.
- *Pour que la fonction* $(x_1, \cdots, x_d) \mapsto \sqrt{f(x_1, \cdots, x_d)}$ *soit correctement définie, il faut que* $f(x_1, \cdots, x_d) \geqslant 0$.
- *Pour que la fonction* $(x_1, \cdots, x_d) \mapsto \frac{1}{f(x_1, \cdots, x_d)}$ *soit correctement définie, il faut que* $f(x_1, \cdots, x_d) \neq 0$.

Méthode

Afin de déterminer le domaine de définition d'une fonction de plusieurs variables $(x_1, \cdots, x_d) \mapsto f(x_1, \cdots, x_d)$, on peut essayer de suivre cette méthodologie:

- Regarder, dans l'expression de la fonction f, chaque partie faisant intervenir une expression de la forme $F(f(x_1, \cdots, x_d))$, où F est une fonction d'une variable ayant un domaine de définition ne correspondant pas à $\mathbb{R}$.
- Pour chacune de ces parties, déterminer le domaine de définition correspondant.
- Le domaine de définition de f est l'intersection des domaines de définition de ces parties.

Exemple. *Afin d'illustrer cette méthode et d'en faciliter la compréhension, nous allons nous pencher sur un exemple en déterminant le domaine de définition de cette fonction:*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{\ln(x+y)}{x} + \sqrt{1 - x^2 - 3y^2} \end{array}$$

- *On note que l'on a trois parties faisant intervenir les fonctions lohgarithme, inverse et racine carrée: Un produit entre les fonctions* $(x, y) \mapsto \ln(x + y)$ *et* $(x, y) \mapsto \frac{1}{x}$*, le tout additionné avec la fonction* $(x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - 3y^2}$.
- *Déterminons les domaines de définition de chaque fonction:*
  - *Pour la fonction* $(x, y) \mapsto \ln(x + y)$*, on exige que* $x + y > 0$*, son domaine de définition est donc* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\}$.
  - *Pour la fonction* $(x, y) \mapsto \frac{1}{x}$*, on exige que* $x > 0$*, son domaine de définition est donc* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.
  - *Pour la fonction* $(x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - 3y^2}$*, on exige que* $1 - x^2 - 3y^2 \geqslant 0$*, son domaine de définition est donc* $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (\sqrt{3}y)^2 \leqslant 1\right\}$.

⋆ *Le domaine de définition de f correspond à l'intersection des trois domaines cités précédemment.*

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (\sqrt{3}y)^2 \leqslant 1, y > -x, x \neq 0\right\} \tag{3.4}$$

On peut également dessiner ce domaine de définition:

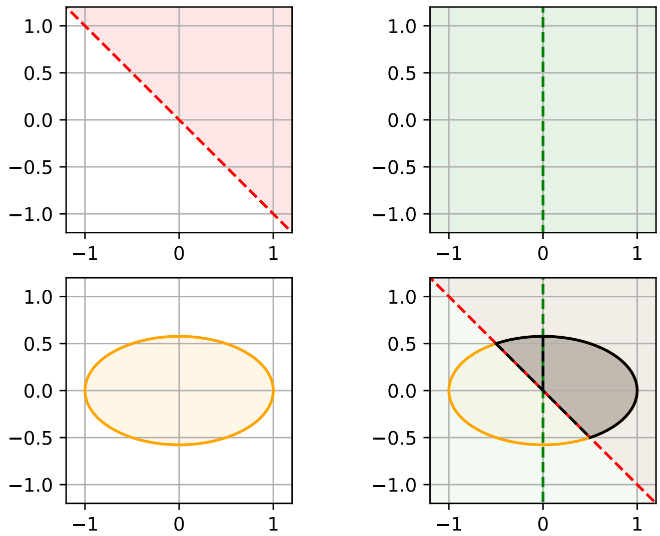


Figure 3.1: Les domaines de définition des fonctions $(x,y) \mapsto \ln(x+y)$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{x}$ et $(x,y) \mapsto \sqrt{1-x^2-3y^2}$ sont représentés respectivement en rouge, vert et orange. Le domaine de définition de f, qui correspond à l'intersection des trois, est représenté en noir-gris sur la dernière figure.

3.2 Limites et continuité

Dans cette section, nous allons aborder la notion de limite et de continuité pour une fonction de plusieurs variables. Tout d'abord, on considèrera dans toute cette section une fonction de la forme:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R}^q \\ (x_1, \cdots, x_d) & \longmapsto & \begin{bmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_d) \\ \vdots \\ f_q(x_1, \cdots, x_d) \end{bmatrix} \end{array}$$

le cas particulier $q = 1$ correspond aux fonctions de la forme:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_d) & \longmapsto & f(x_1, \cdots, x_d) \end{array}$$

3.2.1 Notion de limite

Définition (Limite d'une fonction de plusieurs variables)

- ⋆ Soient $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^d$, $l \in \mathbb{R}$. On dit que f **admet** l **pour limite en** a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{B}(a, \delta)$, $|f(x) - l| < \varepsilon$.
- ⋆ Soient $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $a \in \mathbb{R}^d$, $l \in \mathbb{R}^q$. On dit que f **admet** l **pour limite en** a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{B}(a, \delta)$, $||f(x) - l|| < \varepsilon$.

Dans les deux cas, on note:

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad = \quad l \tag{3.5}$$

ou encore $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$

Remarques. ⋆ *Dire que* $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ *revient à dire que* $||f(x) - l|| \longrightarrow 0$ *lorsque* $||x - l|| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

- ⋆ *On utilise dans la définition la norme euclidienne, mais on peut prendre n'importe quelle norme, puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.*
- ⋆ *Le deuxième point de la définition signifie que si* $l = (l_1, \cdots, l_q) \in \mathbb{R}^q$, *alors les fonctions réelles* $f_1, \cdots, f_q$ *admettent respectivement pour limite* $l_1, \cdots, l_q$.

Proposition (Opérations sur les limites)

- ⋆ **Fonctions scalaires:** Soient $f, g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^d$, $l, l' \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l'$. On a alors:
  - **Somme:** $f(x) + g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l + l'$
  - **Produit:** $f(x) \cdot g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \cdot l'$
  - **Quotient:** Si $l' \neq 0$, alors $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \frac{l}{l'}$
- ⋆ **Somme de fonctions à valeurs vectorielles:** Soient $f, g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $a \in \mathbb{R}^d$, $l, l' \in \mathbb{R}^q$ tels que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l'$. On a alors $f(x) + g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l + l'$.
- ⋆ **Composition:** Soient $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $g : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^r$, $a \in \mathbb{R}^d$, $l \in \mathbb{R}^r$ tels que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{x \to l}{\longrightarrow} l'$. On a alors $g(f(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l'$.

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^q & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^r \\ a & \longmapsto & l & \longmapsto & l' \end{array}$$

Exemple. *Calculons la limite en* $(2, 0)$ *de la fonction* $f : (x, y) \longmapsto \frac{x^3 e^y}{x^2 + y^2}$.

- ⋆ *Les fonctions* $(x, y) \longmapsto x^3$ *et* $(x, y) \longmapsto e^y$ *admettent respectivement* 8 *et* 1 *pour limite lorsque* $(x, y) \longrightarrow (2, 0)$, *donc par produit, la fonction* $(x, y) \longmapsto x^3 e^y$ *admet pour limite* 8 *lorsque* $(x, y) \longrightarrow (2, 0)$.

- *Les fonctions* $(x,y) \longmapsto x^2$ *et* $(x,y) \longmapsto y^2$ *admettent respectivement* 4 *et* 0 *pour limite lorsque* $(x,y) \longrightarrow (2,0)$*, donc par somme, la fonction* $(x,y) \longmapsto x^2+y^2$ *admet pour limite* 4 *lorsque* $(x,y) \longrightarrow (2,0)$*.*
- *Finalement, par quotient, la fonction* $f : (x,y) \longmapsto \frac{x^3e^y}{x^2+y^2}$ *admet pour limite* 2 *lorsque* $(x,y) \longrightarrow (2,0)$*.*

3.2.2 Continuité

Définition (Continuité d'une fonction de plusieurs variables)

- Soient $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^d$. On dit que f **est continue en** a si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$, autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{B}(a,\delta)$, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
- Soient $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^q$ et $a \in \mathbb{R}^d$. On dit que f **est continue en** a si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$, autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{B}(a,\delta)$, $||f(x) - f(a)|| < \varepsilon$.
- Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. On dit que f **est continue sur** Ω si f est continue en tout point $a \in \Omega$. L'ensemble des fonctions continues sur Ω est noté $\mathcal{C}^0(\Omega,\mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(\Omega,\mathbb{R}^q)$ pour les fonctions à valeurs vectorielles. On trouve aussi $\mathcal{C}^0(\Omega)$.

Remarque. *Une fonction à valeurs vectorielles est continue si chacune de ses composantes l'est.*

Exemple. *Voici quelques exemples de fonctions continues:*

- *La fonction* $(x,y) \longmapsto x$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$*. En effet, si* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*, alors on a:*

$$\begin{aligned} |x-a| &\leqslant \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \\ &\underset{(x,y)\to(a,b)}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

  Si l'on veut suivre la définition, pour $\varepsilon > 0$*, il suffit de prendre* $\delta = \varepsilon$*. On montre de la même manière que* $(x,y) \longmapsto y$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$*.*

- *La norme euclidienne* $||\cdot||_2$ *est continue sur* $\mathbb{R}^d$*. En effet, si* $a \in \mathbb{R}^d$*, alors l'inégalité triangulaire assure que, pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$*:*

$$\begin{aligned} \big|||x||_2 - ||a||_2\big| &\leqslant ||x-a||_2 \\ &\underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

  Là encore, si l'on veut suivre la définition, pour $\varepsilon > 0$*, il suffit de prendre* $\delta = \varepsilon$*. Notons que ce résultat est vrai pour n'importe quelle norme, puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.*

Proposition (Opérations sur les fonctions continues)

- **Fonctions scalaires:** Soient $f, g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. On a alors:
  - **Somme:** $f + g$ est continue sur Ω.
  - **Produit:** $f \cdot g$ est continue sur Ω.
  - **Quotient:** Si g ne s'annule pas sur Ω, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur Ω.
- **Somme de fonctions à valeurs vectorielles:** Soient $f, g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^q$ continues sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Alors $f + g$ est continue sur Ω.
- **Composition:** Soient $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $g : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^r$ continues. Alors $g \circ f$ est continue.

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^q & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^r \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Exemple. *Voici quelques exemples:*

- *Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues alors la fonction $(x, y) \longmapsto \varphi(x)\psi(y)$ est continue sur $I \times J$.*
- *La norme euclidienne est continue sur $\mathbb{R}^d$ car les fonctions $x \longmapsto x_k^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^d$ comme fonctions polynomiales, puis par somme, la fonction $x \longmapsto x_1^2 + \cdots + x_d^2$ est continue sur $\mathbb{R}^d$, enfin, la continuité de la racine carrée assure que $||\cdot||_2$ est continue sur $\mathbb{R}^d$.*

Proposition (Fonction continue et chemin)

Soient $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $a \in \mathbb{R}^d$ et $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tel que $\gamma(0) = a$. Si f est continue en a, alors:

$$f(\gamma(t)) \underset{t \to a}{\longrightarrow} f(a) \tag{3.6}$$

Remarque. *Cette proposition est très utile pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point. En effet, il suffit de trouver* ***UN SEUL*** *chemin $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tel que $t \longmapsto f(\gamma(t))$ ne tende pas vers $f(a)$ lorsque t tend vers 0.*

Exemple. *Soit $d > 1$. considérons la fonction:*

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x}{||x||_2} & si \quad x \neq 0 \\ (1, \cdots, 1) & si \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Considérons le chemin $\gamma(t) = (t, \cdots, t)$. On a alors:

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= \frac{(t,\cdots,t)}{\sqrt{t^2+\cdots+t^2}} \\ &= \frac{(t,\cdots,t)}{\sqrt{dt^2}} \\ &= \frac{(t,\cdots,t)}{t\sqrt{d}} \\ &= \frac{(1,\cdots,1)}{\sqrt{d}} \\ &\underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{(1,\cdots,1)}{\sqrt{d}} \neq 0 \end{aligned}$$

Donc f n'est pas continue en 0.

3.3 Cas pratique: fonction scalaire de deux variables

Concentrons-nous maintenant sur des fonctions de la forme

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

L'idée est de savoir comment montrer que f est coninue ou non en un point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Méthode

Pour étudier la continuité de f en (a,b), deux options s'offrent à nous:

- ⋆ **f est continue en (a,b):** Dans ce cas, on montre que $|f(x,y) - f(a,b)|$ tend vers 0 lorsque $|(x,y) - (a,b)|$ tend vers 0.
- ⋆ **f n'est pas continue en (a,b):** Dans ce cas, on trouve un chemin $t \longmapsto (x(t), y(t))$ tel que $t \longmapsto f(x(t), y(t))$ tende vers une limite différente de $f(a,b)$.

Attention !!!

Pour dire qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, dire que les fonctions $x \longmapsto f(x,y)$ et $y \longmapsto f(x,y)$ sont continues, respectivement pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ fixés ne suffit pas.

Exemple. *Traitons deux cas de figure.*

- ⋆ *Considérons la fonction*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

On a:

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,0)| &= \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &= \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

Or, on a $|x|,|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ *donc:*

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,0)| &\leqslant \frac{\sqrt{x^2+y^2}^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &\leqslant \sqrt{x^2+y^2}\\ &\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Donc f *est continue en* $(0,0)$.

Remarque. *On peut même faire un changement de variable en coordonées polaires* $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ *et se ramener à étudier la limite* $r \to 0$.

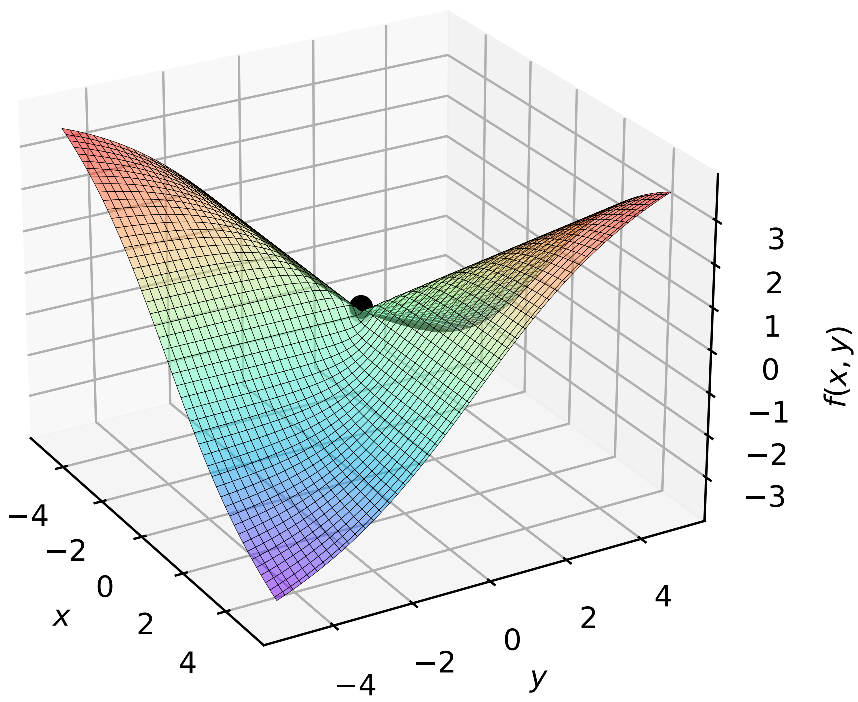


Figure 3.2: Fonction continue en $(0,0)$

⋆ *Considérons à présent la fonction*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{xy}{x^2+y^2} & si & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si & (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array}$$

Soit $t > 0$. On prend le chemin $\gamma(t) = (t,t)$. On a alors:

$$\begin{aligned} f(t,t) &= \frac{t^2}{t^2+t^2} \\ &= \frac{1}{2} \\ &\underset{t \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

Donc f n'est pas continue en $(0,0)$. On en peut pas prolonger la fonction $(x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ (en effet, on peut montrer que $f(0,t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$).

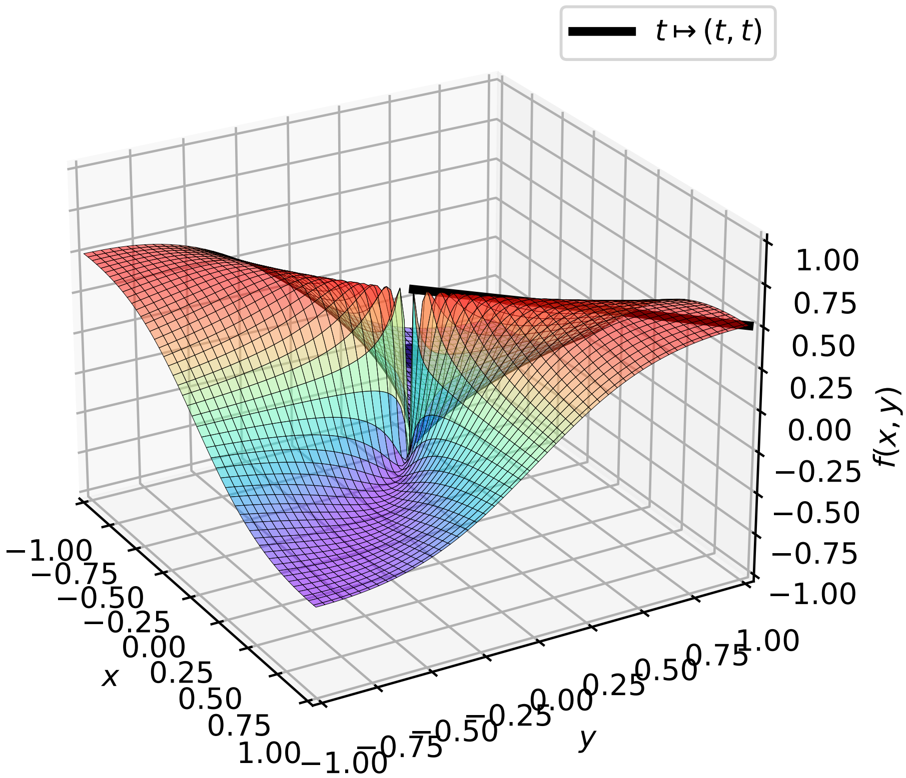


Figure 3.3: Fonction non continue en $(0,0)$

Chapitre 4

Calcul différentiel

Le but de ce (long) chapitre est de généraliser la notion de dérivabilité ainsi que de dérivée pour les fonctions de plusieurs variables. Tout comme dans le cas d'une fonction d'une variable réelle, on peut appliquer les outils développés à l'étude d'extrema d'une fonction de plusieurs variables.

Dans ce chapitre, nous travaillerons avec des fonctions de la forme

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R}^q \\ & (x_1, \cdots, x_d) & \longmapsto & \begin{bmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_d) \\ \vdots \\ f_q(x_1, \cdots, x_d) \end{bmatrix} \end{array}$$

qui sont des fonctions à valeurs vectorielles, ou bien des fonctions de la forme:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R}^q \\ & (x_1, \cdots, x_d) & \longmapsto & f(x_1, \cdots, x_d) \end{array}$$

qui sont des fonctions à valeurs scalaires.

4.1 Dérivées directionnelles et partielles

4.1.1 Dérivée directionnelle

Définition (Dérivée directionnelle)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $a \in \Omega$ et $v \in \mathbb{R}^d$. On dit que f admet une **dérivée directionnelle au point a dans la direction v** si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h}$$

existe et est finie. On note dans ce cas:

$$D_v f(a) \quad := \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} \tag{4.1}$$

Remarque. ⋆ *Le fait de travailler sur un ouvert permet d'éviter tout problème au bord (autrement dit, on peut toujours s'insérer dans une boule au voisinage de a)*

- ⋆ *Dire que f admet une dérivée directionnelle en a dans la direction v signifie que la fonction $t \longmapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0.*

Exemple. *Considérons la fonction $f : (x,y) \longmapsto \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$. On a, pour $h \neq 0$:*

$$\begin{aligned} \frac{f(h,h) - f(0,0)}{h} &= \frac{1}{h}\begin{bmatrix} h \\ -h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En passant à la limite $h \to 0$, on obtient

$$D_{(1,1)}f(0,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

4.1.2 Dérivée partielle

Définition (Dérivée partielle)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $a \in \Omega$ et $k \in [\![1,d]\!]$. On dit que f admet une **dérivée partielle au point a par rapport à x_k** (ou encore k-ième dérivée partielle) si la limite

$$D_{e_k}f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+he_k) - f(a)}{h} \tag{4.3}$$

existe et est finie (où e_k est le k-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On note dans ce cas:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+he_k) - f(a)}{h} \tag{4.4}$$

Remarque. ⋆ *On trouve parfois la notation $\partial_k f(a)$ ou encore $\partial_{x_k} f(a)$ pour exprimer la k-ième dérivée partielle.*

- ⋆ *Concrètement, on a, si $a = (a_1, \cdots, a_d)$:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, \cdots, a_d) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big[f(a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k + h, a_{k+1}, \cdots, a_d) \\ &- f(a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_d)\Big] \end{aligned}$$

- ⋆ *Dans le cas d'une fonction f à valeurs vectorielles, si f admet une dérivée partielle en a par rapport à x_k, alors on a*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_k}(a) \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Méthode

Pour calculer la dérivée partielle selon x_k d'une fonction $(x_1, \cdots, x_k) \mapsto f(x_1, \cdots, x_k)$, on "gèle" les variables $x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_d$ et on dérive la fonction d'une variable $x_k \longmapsto f(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_d)$. Lorsque la fonction est à priori mal définie en un point, on peut revenir à la définition pour calculer la dérivée partielle.

Exemple. ⋆ *On souhaite calculer les deux dérivées partielles de la fonction* $f : (x, y) \mapsto x^2 + xe^y + \sin(y)$*:*

- ***Première dérivée partielle:*** *Fixons la variable* y*, on dérive la fonction* $x \mapsto x^2 + xe^y + \sin(y)$*. Les quantités* e^y *et* $\sin(y)$ *se comportent comme des constantes, et on a ainsi:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad = \quad 2x + e^y \tag{4.6}$$

- ***Seconde dérivée partielle:*** *Fixons la variable* x*, on dérive la fonction* $y \mapsto x^2 + xe^y + \sin(y)$*. Les quantités* x^2 *et* x *se comportent comme des constantes, et on a ainsi:*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \quad = \quad xe^y + \cos(y) \tag{4.7}$$

⋆ *Considérons maintenant cet exemple:*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si & (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array}$$

On note que $f(x, y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$ *(donc* f *est continue en* $(0, 0)$*) et on veut calculer la dérivée partielle en* x *en* $(0, 0)$*. On revient à la définition:*

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \quad = \quad 0$$

Donc, en passant à la limite $h \to 0$*, on a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad = \quad 0$$

Proposition (Opérations sur les dérivées partielles)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $a \in \Omega$ et $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant chacune une dérivée partielle selon x_k en a. On a alors:

- ⋆ **Somme:** $f + g$ admet une dérivée partielle en a selon x_k et

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_k}(a) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_k}(a)$$

- ⋆ **Produit:** $f \cdot g$ admet une dérivée partielle en a selon x_k et

$$\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_k}(a) \quad = \quad f(a)\frac{\partial g}{\partial x_k}(a) + g(a)\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

- ⋆ **Inverse:** Si $f(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ admet une dérivée partielle en a selon x_k et

$$\frac{\partial(\frac{1}{f})}{\partial x_k}(a) \quad = \quad -\frac{1}{f(a)^2}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

- ⋆ **Composition:** Si $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable alors $\varphi \circ f$ admet une dérivée partielle en a selon x_k et:

$$\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_k}(a) \quad = \quad \varphi'(f(a))\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

Remarque. *Le premier point de cette proposition (somme de fonctions) s'applique aux fonctions vectorielles.*

4.2 Fonctions différentiables

4.2.1 Différentielle d'une fonction

Définition-Théorème (Fonction différentiable et différentielle)

- ⋆ Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $a \in \Omega$ et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$. f est dite **différentiable en** a si ils existent une application linéaire $L_a : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^q$ et une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^q$ tels que, pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ proche de 0, on a:

$$f(a+h) = f(a) + L_a \cdot h + ||h|| \, \varepsilon(h) \tag{4.8}$$

et:

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \tag{4.9}$$

- ⋆ Si une telle application L_a existe, alors elle est unique et est appelée la **différentielle de f en** a, on la note $\mathrm{d}f(a)$ (ou encore $Df(a)$).

Remarques. ⋆ *La norme $||\cdot||$ choisie n'a pas d'importance, puisque nous sommes toujours en dimension finie, là où les normes sont équivalentes.*

⋆ *Dire que f est différentiable en a revient à dire qu'il existe une application linéaire $L_a : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^q$ telle que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{||h||} \Big[f(a+h) - f(a) - L_a \cdot h \Big] = 0. \tag{4.10}$$

D'ailleurs, dire que h est proche de 0 signifie que l'on peut le considérer aussi petit que nécéssaire (au sens de la norme) avant de le faire tendre vers 0.

Exemple. *Considérons la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^2 + (1 + y)^2$. Regardons si f est différentiable en $(0, 0)$. Soit $h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^2$. On a:*

$$\begin{aligned} f(h,k) &= h_x^2 + (1+h_y)^2 \\ &= h_x^2 + 1 + 2h_y + h_y^2 \\ &= f(0,0) + 0 \cdot h + 2 \cdot k + ||(h_x,h_y)|| \, \varepsilon(h_x,h_y) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(h) = ||h||$. Cette fonction tend bien vers 0 lorsque h tend vers 0, donc f est bien différentiable en $(0, 0)$ et sa différentielle en ce pointe est donnée par:

$$\mathrm{d}f(0,0) \cdot (h_x, h_y) = 2h_y$$

Proposition

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$. Si f est différentiable en a, alors elle est continue en a.

Définition (Matrice jacobienne)

Soient $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^q$ et $a \in \mathbb{R}^d$. Si f admet des dérivées partielles en a, alors on définit la **matrice jacobienne de f en a** et on note $Jac(f)(a)$ la matrice à q lignes et d colonnes définie par:

$$Jac(f)(a) \quad := \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_d}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_d}(a) \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

Remarque. $\star$ *On peut parfois trouver la notation* $\frac{\partial(f_1,\cdots,f_q)}{\partial(x_1,\cdots,x_d)}(a)$ *ou encore cette dernière:* $Jac\left(\frac{(f_1,\cdots,f_q)}{(x_1,\cdots,x_d)}\right)(a)$

$\star$ *On peut représenter $Jac(f)(a)$ en écrivant ses colonnes:*

$$Jac(f)(a) \quad = \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\Big|\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\Big|\cdots\Big|\frac{\partial f}{\partial x_d}(a)\right] \tag{4.12}$$

$\star$ *Dans beaucoup de documents, pour décrire la formule*

$$f(x_1,\cdots,x_d) \quad = \quad \begin{bmatrix} f_1(x_1,\cdots,x_d) \\ \vdots \\ f_q(x_1,\cdots,x_d) \end{bmatrix}, \tag{4.13}$$

c'est la notation

$$f(x_1,\cdots,x_d) \quad = \quad (f_1(x_1,\cdots,x_d),\cdots,f_q(x_1,\cdots,x_d)) \tag{4.14}$$

qui sera utilsée

Exemple. *Considérons la fonction*

$$\begin{aligned} f : (x,y) \quad &\longmapsto \quad (x^2, ye^x + 2\sin(y), x-y) \\ &= \quad \begin{bmatrix} x^2 \\ ye^x + 2\sin(y) \\ x-y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sa jacobienne en (x,y,z) est donnée par:

$$\begin{aligned} Jac(f)(x,y) &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right] \\ &= \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ ye^x & e^x + 2\cos(y) \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Théorème (Différentielle et matrice jacobienne)

Soient $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^q$ et $a \in \mathbb{R}^d$. Si f ets différentiable en a, alors f admet des dérivées partielles en a et sa différentielle en a est donnée par

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(a)\cdot h &= Jac(f)(a)h \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_d}(a)h_d \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_d}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_d}(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_d \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Remarque. *Par abus de notation, on note parfois $\mathrm{d}f(a) = Jac(f)(a)$, autrement dit, on identifie la matrice à son application linéaire cannoniquement associée.*

Attention !!!

La réciproque n'est pas vraie. Une fonction peut admettre des dérivées partielles sans être différentiable.

Exemple. *Considérons la fonction:*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x_1\cdots x_d}{||x||^d} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

On peut montrer que les dérivées partielles de f valent 0 dans toutes les directions. Si f est différentiable en 0, alors sa différentielle en 0 vaut 0, donc on a

$$f(h) = ||h||\,\varepsilon(h)$$

avec

$$\varepsilon(h) = \frac{h_1\cdots h_d}{||h||^{d+1}} \tag{4.17}$$

On peut montrer que, si $t > 0$, alors $\varepsilon(t,\cdots,t) = \frac{1}{\sqrt{d}t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} +\infty$. Donc f n'est pas différentiable en 0. D'ailleurs, elle n'est même pas continue en 0.

4.2.2 Propriétés de la différentielle

4.2.2.1 Somme, produit, inverse

Théorème (Opérations sur les différentielles)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $a \in \Omega$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiables en a. On a alors:

- ⋆ **Somme:** $f + g$ différentiable en a et

$$\mathrm{d}(f+g)(a) \quad = \quad \mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}g(a)$$

- ⋆ **Produit:** $f \cdot g$ est différentiable en a et:

$$\mathrm{d}(fg)(a) \quad = \quad f(a)\mathrm{d}g(a) + g(a)\mathrm{d}f(a)$$

- ⋆ **Inverse:** Si $f(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est différentiable en a et

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right)(a) \quad = \quad -\frac{1}{f(a)^2}\mathrm{d}f(a)$$

Remarques. ⋆ *Le premier point de cette proposition (somme de fonctions) s'applique aux fonctions vectorielles.*

⋆ *Une fonction polynomiale, affine, exponentielle, de type $x \longmapsto x_k$, sinus, cosinus... sera toujours différentiable sur $\mathbb{R}^d$.*

⋆ *On peut remplacer les différentielles par les matrices jacobiennes, cela n'a pas d'importance.*

4.2.2.2 Composition

Théorème (Différentielle d'une composée de fonctions)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et $U \subset \mathbb{R}^q$ des ouverts, $a \in \Omega$ et $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiables en a. On a alors. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $a \in \Omega$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ différentiable en a et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^r$ différentiable en $f(a)$ avec $f(a) \in U$. Alors la composée $g \circ f$ définie comme ceci:

$$\begin{array}{rcccccc} g \circ f : & \mathbb{R}^d & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^q & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^r \\ & x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

est différentiable en a et on a:

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a) \tag{4.18}$$

en terme de matrices jacobiennes, on a:

$$Jac(g \circ f)(a) = Jac(g)(f(a)) \cdot Jac(f)(a) \tag{4.19}$$

Exemple. *Considérons la fonction $f : (x, y) \longmapsto (-y^2, e^x)$. Soit $g : (u, v) \longmapsto g(u, v)$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Calculons les dérivées partielles de $g \circ f$ selon x et y en fonction des dérivées partielles de g selon u et v.*

- ⋆ ***Première stratégie: Méthode naïve.*** *On pourrait calculer $g \circ f$ directement, donnant, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:*

$$(g \circ f)(x, y) = g(-y^2, e^x) \tag{4.20}$$

puis calculer directement les dérivées partielles, mais cette technique présente l'inconvénient d'être exigente en calculs, en particulier si g est explicitement donnée (donc si l'on doit tout calculer à la main), ou même si l'espace de départ ou d'arrivée est de dimension plus grande.

- ⋆ ***Seconde stratégie: Utilisation du théorème.*** *On peut faire appel au théorème. Cette méthode présente l'avantage de ne pas nécéssiter un calcul explicite de $g \circ f$ pour calculer les dérivées partielles, ce qui limite le risque d'erreurs de calcul. On a ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} Jac(g \circ f)(x, y) &= Jac(g)(f(x, y)) \cdot Jac(f)(x, y) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(f(x, y)) & \frac{\partial g}{\partial v}(f(x, y)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(-y^2, e^x) & \frac{\partial g}{\partial v}(-y^2, e^x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2y \\ e^x & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial v}(-y^2, e^x)e^x & -2y\frac{\partial g}{\partial u}(-y^2, e^x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Application (Règle de la chaîne)

Soient $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en tout point de $\mathbb{R}^d$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction dérivable sur I. Alors la fonction $f \circ u$, définie de cette façon:

$$\begin{array}{rcccc} f\circ u: & I & \xrightarrow{u} & \mathbb{R}^d & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & u(t) & \longmapsto & f(u(t)) \end{array}$$

est dérivable sur I et sa dérivée est donnée, pour tout $t \in I$, par:

$$\begin{aligned} (f\circ u)'(t) &= \mathrm{d}f(u(t))\cdot \dot{u}(t) \qquad (4.21)\\ &= \dot{u_1}(t)\frac{\partial f}{\partial x_1}(u(t)) + \cdots + \dot{u_d}(t)\frac{\partial f}{\partial x_d}(u(t)) \end{aligned}$$

Exemple. *Soit la fonction $f : (x,y) \longmapsto e^x + y^4$. Considérons la fonction $\varphi : t \longmapsto f(t,t^2)$. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

$$\varphi(t) = f(t,t^2)$$

Ainsi, la règle de la chaîne assure que, puisque f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et $t \longmapsto (t,t^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= 1\cdot e^t + 4(t^2)^3\cdot(t^2)^4 \\ &= e^t + 4t^{14} \qquad (4.22) \end{aligned}$$

4.2.2.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^q$. On dit que f **est de classe $\mathcal{C}^1$ sur** Ω si f admet des dérivées partielles sur Ω et si celles-ci y sont continues. On note $\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^q)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Remarque. *On peut aussi parler de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage d'un point si la fonction y ademt des dérivées partielles et si celles-ci sont continues en ce point.*

Exemple. *La fonction $f : (x,y) \longmapsto e^x - xy^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. En effet, ses dérivées partielles sont, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \longmapsto e^x - y^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \longmapsto -2xy$. Ces fonctions sont bien continues sur $\mathbb{R}^2$*

Théorème (Propriétés des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$)

- $\star$ Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert (resp. au voisinage d'un point) est continue sur cet ouvert (resp. en ce point).
- $\star$ Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert est différentiable et sa différentielle est continue.

Remarques. $\star$ *Tout comme le caractère différentiable, le caractère $\mathcal{C}^1$ est stable par somme, multiplication, inverse (sous réserve de non-annulation), composition...*

$\star$ *On peut également dire que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si la fonction $x \longmapsto Jac(f)(x)$ est continue de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathcal{M}_{q,d}(\mathbb{R})$.*

Résumé

Concrètement, on a au voisinage d'un point ou sur un ouvert:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Caractère } \mathcal{C}^1 & \Longrightarrow & \text{Différentiabilité} & \Longrightarrow & \text{Existence de dérivées partielles} \\ & & \Downarrow & & \\ & & \text{Continuité} & & \end{array}$$

4.3 Dérivées d'ordre supérieur

4.3.1 Différentielle d'ordre supérieur

Définition (Différentiabilité et différentielle d'ordre supérieur)

On donne uné définition récursive de la différentiablilité d'ordre supérieur.

- ⋆ Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $a \in \Omega$. On dit que f **est** k **fois différentiable en** a si f est $(k-1)$-fois différentiable en a et si l'application

$$\mathrm{d}^{k-1}f(a) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{L}(\underbrace{\mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d}_{k-1 \text{ fois}}, \mathbb{R}^q)$$

(application $(k-1)$-linéaire) est différentiable en a. On note:

$$\mathrm{d}^{k}f(a) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{L}(\underbrace{\mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d}_{k \text{ fois}}, \mathbb{R}^q)$$

la différentielle de cette application, que l'on appelle **différentielle d'ordre** k.

- ⋆ On dit que f est k **fois différentiable sur** Ω si elle est k fois différentiable en tout point de Ω.

- ⋆ On dit que f **est de classe** $\mathcal{C}^k$ **sur** Ω si f est différentiable et si $\mathrm{d}f \in \mathcal{C}^{k-1}(\Omega, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^q))$. On note $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^q)$, et que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^q)$.

Résumé

Concrètement, on a:

$$\begin{array}{rc}
 & f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q \\
 & \mathrm{d}\downarrow \\
f \text{ différentiable} & \mathrm{d}f : \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^q) \\
 & \mathrm{d}\downarrow \\
f \text{ 2 fois différentiable} & \mathrm{d}^2 f : \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^q) \\
 & \mathrm{d}\downarrow \\
 & \vdots \\
 & \mathrm{d}\downarrow \\
f\ (k-1) \text{ fois différentiable} & \mathrm{d}^{k-1} f : \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(\underbrace{\mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d}_{(k-1) \text{ fois}}, \mathbb{R}^q) \\
 & \mathrm{d}\downarrow \\
f\ k \text{ fois différentiable} & \mathrm{d}^{k} f : \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(\underbrace{\mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d}_{k \text{ fois}}, \mathbb{R}^q)
\end{array}$$

4.3.2 Différentielle d'ordre deux

Dans cette sous-section, on va se restreindre aux fonctions $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ (i.e. à valeurs scalaires), et uniquement aux fonctions deux fois différentiables.

4.3.2.1 Dérivées partielles d'ordre deux, hessienne

Définition (Dérivée partielle d'ordre 2)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $a \in \mathbb{R}^d$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles dans toutes les directions sur Ω. On dit que f **admet des dérivées partielles secondes dans la direction** x_i **puis** x_j **en** a (où $i, j \in [\![1, d]\!]$ si la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admet une dérivée partielle selon la direction x_j en a. On note cette dérivée partielle seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Attention !!!
A priori, on ne peut pas intervertir l'ordre des dérivées partielles

Exemple. *Considérons la fonction*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si & (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array}$$

.

On peut montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \dfrac{4x^2y^3 + yx^4 - y^5}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \dfrac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{array}$$

Un calcul (via les limites) montre que:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & = & 1 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & = & -1 \end{array}$$

Définition **(Matrice hessienne)**

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $a \in \mathbb{R}^d$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles secondes dans toutes les directions en a. On appelle la **matrice hessienne de f en a** et on note $H(f)(a)$ la matrice à d lignes et d colonnes définie par:

$$\begin{aligned} H(f)(a) &:= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_d}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(a) \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \end{aligned} \tag{4.23}$$

Remarque. *On trouve paerfois la notation $Hess(f)(a)$*

Exemple. *La fonction $f : (x,y) \longmapsto x^2 e^y$ admet des dérivées partielles d'ordre 2 dans toutes les directions. La matrice hessienne de cette fonction est donnée, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par:*

$$H(f)(x,y) = \begin{bmatrix} 2e^y & 2xe^y \\ 2xe^y & x^2 e^y \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

Proposition **(Fonction deux fois différentiable)**

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $a \in \mathbb{R}^d$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable en a. Alors f admet des dérivées partielles d'ordre 2 selon toutes les directions (x_i, x_j) (avec $i, j \in [\![1, n]\!]$) et sa différentielle seconde en a est donnée par:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}^2 f(a) : & \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (h,k) & \longmapsto & h^T \cdot H(f)(a) \cdot k \end{array}$$

autrement dit, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 f(a) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) h_1 k_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) h_1 k_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) h_1 k_d \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) h_2 k_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) h_2 k_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_d}(a) h_2 k_d \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1}(a) h_d k_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_2}(a) h_d k_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(a) h_d k_d \end{aligned}$$

Remarque. *Comme avec la jacobienne, on peut, par abus de notation, affirmer que $\mathrm{d}^2 f(a) = H(f)(a)$ (on fait une équivalence entre une forme bilinéaire et sa matrice associée).*

4.3.2.2 Fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et théorème de Schwarz

Définition (Fonction de classe $\mathcal{C}^2$)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f **est de classe $\mathcal{C}^2$ sur** Ω si f est deux fois différentiable sur Ω et si sa différentielle seconde $x \longmapsto \mathrm{d}^2 f(x)$ est continue sur Ω. On note $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$.

Proposition (Fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et dérivées partielles)

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si f admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 par rapport à toutes les variables en tout point de Ω, et si ces dérivées partielles sont toutes continues sur Ω.

Théorème (Théorème de Schwarz)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de a, alors, pour tous $i, j \in [\![1, d]\!]$, on a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \quad = \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \tag{4.25}$$

cela signifie que l'on peut intervertir l'ordre des dérivées et que $H(f)(a)$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Remarques.

- $\star$ *Ce théorème permet, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^2$, d'économiser des calculs de dérivées partielles secondes.*

- $\star$ *Dire que f admet des dérivées partielles au voisinage de a signifie par que ces dérivées partielles sont admises sur une boule ouverte centrée en a pour un rayon suffisament petit.*

Exemple. *Considérons la fonction $f : (x, y, z) \longmapsto xy^2 + \sin(z)$. f admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 par rapport à toutes les variables en tout point de $\mathbb{R}^3$ et celles-ci sont bien continues sur $\mathbb{R}^3$. En vertu du théorème de Schwarz, on a donc, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:*

$$H(f)(x, y, z) \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 & 2y & 0 \\ 2y & 2x & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(z) \end{bmatrix}$$

4.3.2.3 Formule de Taylor-Young à l'ordre deux

On va, dans cette sous-section, généraliser la formule de Taylor-Young connue pour une fonction à une variable, à une fonction à plusieurs variables, à l'ordre 2.

Théorème (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Si h est assez proche de 0 (par exemple situé sur une boule ouverte de rayon suffisament petit), alors on a:

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)\cdot h + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(a)\cdot(h,h) + ||h||^2\,\varepsilon(h) \tag{4.26}$$

où $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. On peut également écrire:

$$f(a+h) = f(a) + Jac(f)(a)\cdot h + \frac{1}{2}h^T\cdot H(f)(a)\cdot h + ||h||^2\,\varepsilon(h) \tag{4.27}$$

Remarques. ⋆ *Là-encore, on peut prendre n'importe quelle norme, car elles sont toutes équivalentes en dimension finie.*

⋆ *On fait une approximation à l'ordre 2 (termes quadratiques). Le terme $||h||^2\,\varepsilon(h)$ contient tous les autres termes (i.e. de degré supérieur).*

Méthode

Concrètement, on a:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \underbrace{f(a)}_{\text{Terme constant (ordre 0)}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_d}(a)h_d}_{\text{Dérivées premières (ordre 1)}} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)h_1^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(a)h_d^2\right)}_{\text{Dérivées secondes identiques (ordre 2)}} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a)h_1h_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{d-1}\partial x_d}(a)h_{d-1}h_d}_{\text{Dérivées secondes croisées (ordre 2)}} \\ &+ \underbrace{||h||^2\,\varepsilon(h)}_{\text{Reste}} \end{aligned}$$

Exemple. *Considérons la fonction $f : (x,y) \longmapsto x^2 + xy + e^y$. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On a:*

$$\begin{aligned} Jac(f)(0,0) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ H(f)(0,0) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, en vertu de la formule de Taylor-Young, on a, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ *proche de* $(0,0)$*:*

$$f(h,k) = 1 + k + h^2 + hk + \frac{k^2}{2} + ||(h,k)||^2 \, \varepsilon(h,k)$$

avec:

$$\varepsilon(h,k) = \frac{e^k - k - \frac{k^2}{2}}{h^2 + k^2}$$

4.3.2.4 Points critiques

L'objectif de cette sous-section est de généraliser la notion d'extremum (minimum, maximum) à une fonction à plusieurs variables.

Définition (Point critique)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que a est un **point critique de** f si f est différentiable en a et si $\mathrm{d}f(a) = 0$. On dit que:

- ⋆ a est un **minimul local** si pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ proche de 0, $f(a+h) \geqslant f(a)$.
- ⋆ a est un **maximum local** si pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ proche de 0, $f(a+h) \leqslant f(a)$.
- ⋆ a est un **point col (ou point selle)** a est minimum ou maximum local selon la direction.

Proposition (Nature d'un point critique)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$ un point critique.

- ⋆ Si toutes les valeurs propres de $H(f)(a)$ sont strictement positives, alors a est un minimum local.
- ⋆ Si toutes les valeurs propres de $H(f)(a)$ sont strictement négatives, alors a est un maximum local.
- ⋆ Si toutes les valeurs propres de $H(f)(a)$ sont toutes non nulles mais de signe différent, alors a est un point col.
- ⋆ Si une valeur propre de $H(f)(a)$ est nulle, alors on ne peut pas conclure.

4.4 Cas pratique: fonction scalaire de deux variables

Le but de cette section est de se focaliser sur l'étude des fonctions de deux variables de la forme:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

L'idée est de savoir:

- ⋆ Montrer que f admet des dérivées partielles en un point ou non.
- ⋆ Montrer que f est différentiable ou non en un point.
- ⋆ Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ ou non au voisinage d'un point.
- ⋆ Etdudier les points critiques de f.

4.4.1 Etude de la différentiabilité ou du caractère $\mathcal{C}^1$

4.4.1.1 Dérivées partielles

Méthode

Pour le calcul de dérivées partielles, deux cas de figure peuvent se présenter:

- ⋆ **Calcul direct:** La fonction est bien définie en le point dont on veut calculer les dérivées partielles et on procède à un calcul direct par calcul "standard" de dérivées.
- ⋆ **Calcul via une limite:** La fonction est à priori mal définie en le point et calculer une dérivée partielle en ce point serait trop compliqué. On calcule donc la ou les dérivées partielle.s via une limite:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} &= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \\ \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} &= \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{aligned}$$

Exemple. *Illustrons le calcul via une limite. Considérons la fonction:*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

.

On veut calculer les dérivées partielles en $(0,0)$*, via un calcul de limite. On a ainsi:*

$$\begin{aligned} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} &= 0 \\ \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} &= 0 \end{aligned}$$

donc, en passant aux limites $h \longrightarrow 0$ *et* $k \longrightarrow 0$, *on trouve:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

. *Donc* f *admet des dérivées partielles en* $(0,0)$.

4.4.1.2 Différentiabilité

Proposition (Différentiabilité d'une fonction de deux variables)

Si f est différentiable en (a,b), alors f admet des dérivées partielles en (a,b) selon x et y et on a:

$$\frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - \mathrm{d}f(a,b)\cdot(h,k)}{||(h,k)||} \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 \tag{4.28}$$

Remarque. *Ce calcul de limite correspond à celui de la fonction* $\varepsilon(h,k)$ *introduite dans la définition de la différentiabilité.*

Méthode

Pour déterminer si f est différentiable ou non en (a,b), deux cas de figure se présentent:

- $\star$ **f est différentiable en (a,b):** Dans ce cas, on doit bien montrer que:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

- $\star$ **f n'est pas différentiable en (a,b):** On trouve UN chemin $t \longmapsto (x(t),y(t))$ tel que $(x(t),y(t)) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} (0,0)$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+x(t),b+y(t)) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)x(t) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)y(t)}{\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}} \neq 0$$

Exemple. *Nous allons donner deux exemples de fonctions, l'une étant différentiable, l'autre non:*

- $\star$ *Considérons la fonction:*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{(xy)^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

.

On montre facilement que f est continue en $(0,0)$. Un calcul de dérivées partielles montre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Regardons si f est différentiable en $(0,0)$. Si c'est la cas, alors on a $\mathrm{d}f(0,0) = (0,0)$ et, comme $f(0,0) = 0$, on doit avoir:

$$\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

soit:

$$\frac{(hk)^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

On sait que, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, $|h|, |k| \leqslant \sqrt{h^2+k^2}$, donc:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{|hk|^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} & = & \dfrac{|h|^2|k|^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & \leqslant & \dfrac{(h^2+k^2)^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & = & \sqrt{h^2+k^2} \\ & \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} & 0 \end{array}$$

donc f est différentiable en $(0,0)$.

⋆ *Considérons la fonction:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & si & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si & (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array}$$

.

On montre facilement que f est continue en $(0,0)$. Un calcul de dérivées partielles montre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Regardons si f est différentiable en $(0,0)$. Si c'est la cas, alors on a $\mathrm{d}f(0,0) = (0,0)$ et, comme $f(0,0) = 0$, on doit avoir:

$$\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

soit:

$$\frac{hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Prenons $(x(t), y(t)) = (t,t)$, avec $t > 0$, on a:

$$
\begin{aligned}
\frac{f(t,t)}{\sqrt{t^2+t^2}} &= \frac{t^3}{\sqrt{2}t^3} \\
&\xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

4.4.1.3 Caractère $\mathcal{C}^1$

Montrer le carcatère $\mathcal{C}^1$ d'une fonction revient à mobtrer la continuité des dérivées partielles, donc la méthode est similmaire à ce qui se fait pour montrer la continuité d'une fonction.

Méthode

Pour déterminer si f est de classe $\mathcal{C}^1$ ou non au voisinage de (a,b), on doit d'abord calculer les dérivées partielles en (a,b) et en dehors de (a,b). Ensuite, deux cas de figure se présentent:

- ⋆ **f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de (a,b):** Dans ce cas, on doit bien montrer que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(a+h,b+k) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \\
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+k) &= \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)
\end{aligned}
$$

- ⋆ **f n'est pas différentiable en (a,b):** On trouve UN chemin $t \longmapsto (x(t),y(t))$ tel que $(x(t),y(t)) \xrightarrow[t\to 0]{} (0,0)$:

$$
\lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(a+x(t),b+y(t)) \neq \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)
$$

ou

$$
\lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(a+x(t),b+y(t)) \neq \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)
$$

Exemple. *Nous allons donner deux exemples de fonctions, l'une étant de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage d'un point, l'autre non.*

- ⋆ *Considérons la fonction:*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

.

On montre facilement que f est continue en $(0,0)$. Un calcul de dérivées partielles montre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ et, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y(4x^2y^2 + x^4 - y^4}{(x^2+y^2)^2)} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x(-4x^2y^2 + x^4 - y^4)}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

On montre facilement que f est différentiable en $(0,0)$. Regardons si f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $(0,0)$. D'une part, on a, pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ suffisament proche de $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(h,k)\right| &\leqslant \frac{|k|\,(4h^2k^2 + h^4 + k^4)}{(h^2+k^2)^2} \\ &\leqslant \frac{|k|\,(4(h^2+k^2)^2 + (h^2+k^2)^2 4 + (h^2+k^2)^2)}{(h^2+k^2)^2} \\ &\leqslant 6|k| \end{aligned}$$

d'autre part, une estimation similaire montre que:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(h,k)\right| \leqslant 6|h|$$

Donc:

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(h,k) &= 0 \\ \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(h,k) &= 0 \end{aligned}$$

donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $(0,0)$.

⋆ *Considérons la fonction:*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} xy\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

.

On montre facilement que f est continue en $(0,0)$. Un calcul de dérivées partielles montre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\left[\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right]$$

On montre facilement que f est différentiable en $(0,0)$. Regardons si f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $(0,0)$. Prenons le chemin $(x(t),y(t)) = (t,t)$ pour $t > 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,t) = t\left[\cos\left(\frac{1}{2t^2}\right) + \frac{1}{2t^2}\sin\left(\frac{1}{2t^2}\right)\right]$$

Cette quantité n'a pas de limite lorsque $t \longrightarrow 0$, donc f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $(0,0)$.

4.4.2 Formule de Taylor-Young et points critiques

Dans cette sous-section, nous allons donner une méthode afin de déterminer la nature d'un point critique d'une fonction de deux variables.

Proposition (Formule de Taylor-Young pour une fonction de deux variables au second ordre)

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de (a,b), alors, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ suffisament proche de $(0,0)$:

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) &= f(a,b) + Jac(f)(a,b) \cdot \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \cdot H(f)(a,b) \cdot \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \\ &+ \ ||(h,k)||^2\,\varepsilon(h,k) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(h,k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

Méthode

Concrètement, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de (a,b), alors, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ suffisament proche de $(0,0)$:

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk \\ &+ (h^2+k^2)\varepsilon(h,k) \end{aligned}$$

avec ε de limite nulle lorsque $(h,k) \longrightarrow (0,0)$.

Proposition (Hessienne et nature d'un point critique)

Soient $(a,b) \in \Omega$ un point critique de f ($\mathcal{C}^2$ au voisinage de (a,b)) ainsi que λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de la matrice hessienne $H(f)(a,b)$.

- ⋆ Si λ_1, $\lambda_2 > 0$, alors (a,b) est un minimum local de f.
- ⋆ Si λ_1, $\lambda_2 < 0$, alors (a,b) est un maximum local de f.
- ⋆ Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ou $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, alors (a,b) est point col (ou point selle) de f.
- ⋆ Si $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$, alors on ne peut rien dire.

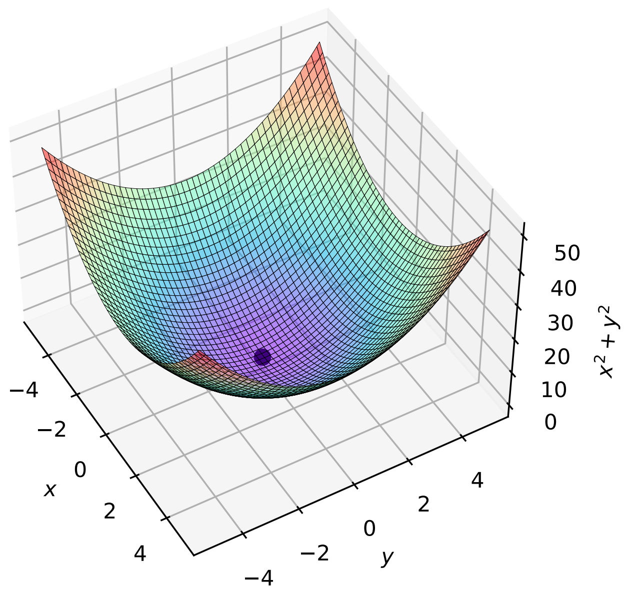


Figure 4.1: Fonction $(x,y) \longmapsto x^2+y^2$. Minimum local en $(0,0)$.

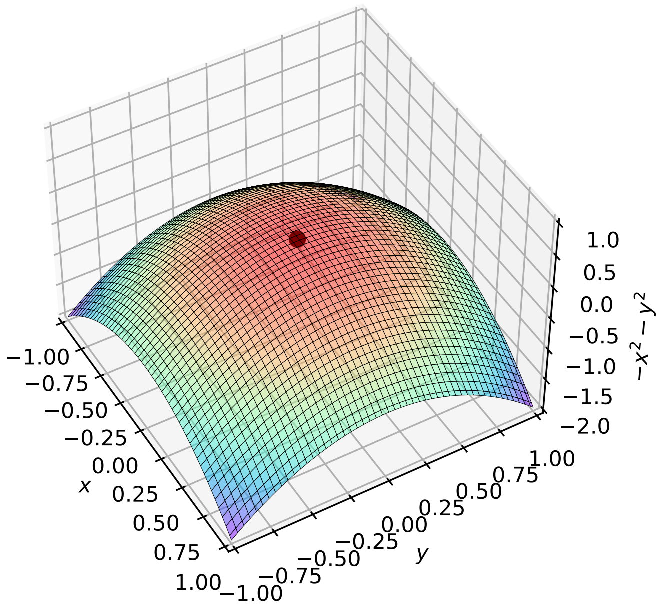


Figure 4.2: Fonction $(x,y) \longmapsto -(x^2+y^2)$. Maximum local en $(0,0)$.

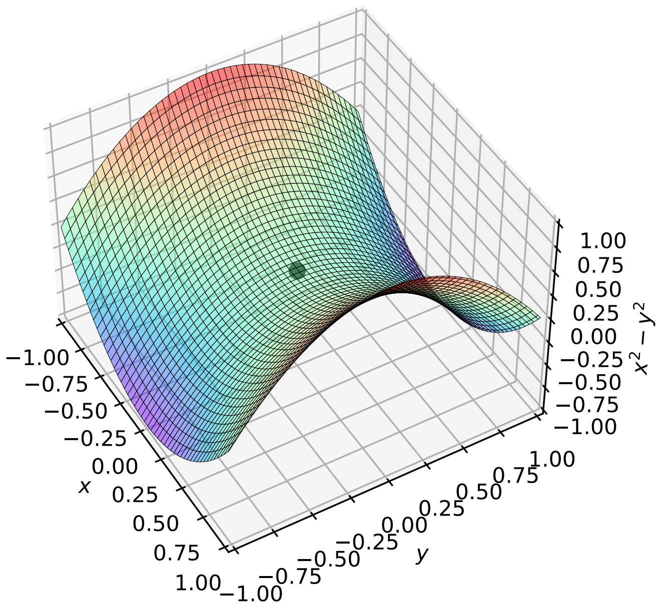


Figure 4.3: Fonction $(x,y) \longmapsto x^2-y^2$. Point selle en $(0,0)$.

Remarque. *Si M est une matrice 2×2, alors, en ayant:*

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

on a $Tr(M) = a + d$ (trace) et $\det(M) = ad - bc$ (déterminant). Si λ_1 et λ_2 sont les deux valeurs propres de M, alors on a $Tr(M) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det(M) = \lambda_1\lambda_2$.

Méthode

Il est possible de déterminer la nature d'un point critique en regardant la trace et le déterminant de la matrice hessienne d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ en un point critique (a, b):

- ⋆ Si $\det(H(f)(a, b)) > 0$ et $Tr(H(f)(a, b)) > 0$ alors (a, b) est un minimum local.
- ⋆ Si $\det(H(f)(a, b)) > 0$ et $Tr(H(f)(a, b)) < 0$ alors (a, b) est un maximum local.
- ⋆ Si $\det(H(f)(a, b) < 0$ alors (a, b) est un point selle.
- ⋆ Si $\det(H(f)(a, b) = 0$ on ne peut pas conclure.

De plus, la matrice hessienne étant de la forme:

$$H(f)(a, b) = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$$

On a alors $Tr(H(f)(a, b)) = r + t$ et $\det(M) = rt - s^2$

Exemple. *Considérons la fonction:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & 2(x-y)^2(1-x-y) \end{array}$$

f est bien de classe $\mathcal{C}^2$ (polynomiale). Un calcul de dérivées partielles montre que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} Jac(f)(x, y) &= \begin{bmatrix} 4(x-y) - 6(x-y)^2 & -4(x-y) + 6(x-y)^2 \end{bmatrix} \\ H(f)(x, y) &= \begin{bmatrix} 4 - 12(x-y) & -4 + 12(x-y) \\ -4 + 12(x-y) & 4 - 12(x-y) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les points critiques sont ceux annulant la jacobienne, donc les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $2(x-y) = 3(x-y)^2$, soit $x = y$ ou bien $2 = 3(x-y)$. Finalement, ces points critiques sont les points de la forme (α, α) ou $\left(\alpha, -\frac{3}{2} + \alpha\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- ⋆ *D'une part, nous avons, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$H(f)(\alpha, \alpha) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

cette matrice est de déterminant nul, on ne peut rien dire de ces points critiques.

⋆ *D'autre part, nous avons, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$H(f)\Big(\alpha, -\frac{2}{3}\alpha\Big) \quad = \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

cette matrice est de déterminant et strictement positif et de trace strictement négative. Ces points critiques sont des maximums locaux.

4.5 Opérateurs différentiels

4.5.1 Définitions et propriétés

Définition (Gradient)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit le **gradient de** f, noté $\overrightarrow{grad} f$ ou $\vec{\nabla} f$, par:

$$\begin{array}{rccc} \vec{\nabla} f : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ & x & \longmapsto & \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d}(x) \end{bmatrix} \end{array}$$

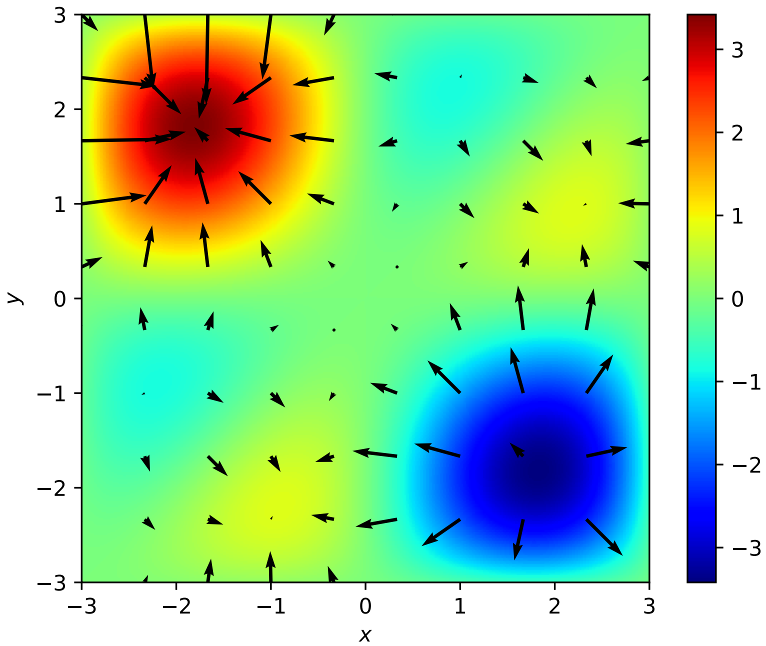


Figure 4.4: Le gradient indique dans quelle direction la fonction va croître (ici, les grandes flèches tendent à pointer vers la zone rouge, de plus grande valeur).

Remarques. $\star$ *Pour tout $x \in \Omega$, on a $\overrightarrow{\nabla} f(x) = Jac(f)(x)^T$.*

$\star$ *On peut aussi noter $\overrightarrow{\nabla} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(x)\right)$*

Exemple. *Le gradient de la fonction $x \longmapsto ||x||_2^2$ (carré de la norme euclidienne) est donné par $x \longmapsto 2x$.*

Théorème (Propriétés du gradient)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors ces propriétés:

- $\star$ **Somme:** $\overrightarrow{\nabla}(f+g) = \overrightarrow{\nabla} f + \overrightarrow{\nabla} g$.
- $\star$ **Produit:** $\overrightarrow{\nabla}(fg) = f\overrightarrow{\nabla} g + g\overrightarrow{\nabla} f$.
- $\star$ **Inverse:** Si g ne s'annule pas sur Ω, alors $\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{1}{g^2}\overrightarrow{\nabla} g$.
- $\star$ **Composition:** Si $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\overrightarrow{\nabla}(\varphi \circ f) = \varphi' \circ f \times \overrightarrow{\nabla} f$

Définition (Divergence)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit la **divergence de** f, notée $div(f)$ ou $\overrightarrow{\nabla} \cdot f$, par:

$$div(f) : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \cdots + \frac{\partial f_d}{\partial x_d}(x) \end{array}$$

Exemple. *La divergence de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{3}(x_1^3, \cdots, x_d^3)$ est la fonction $x \longmapsto ||x||_2^2$ (carré de la norme euclidienne). En effet, chaque composante est donnée par $x \longmapsto \frac{1}{3}x_k^3$, et la dérivée partielle par rapport à x_k est donnée par $x \longmapsto x_k^2$.*

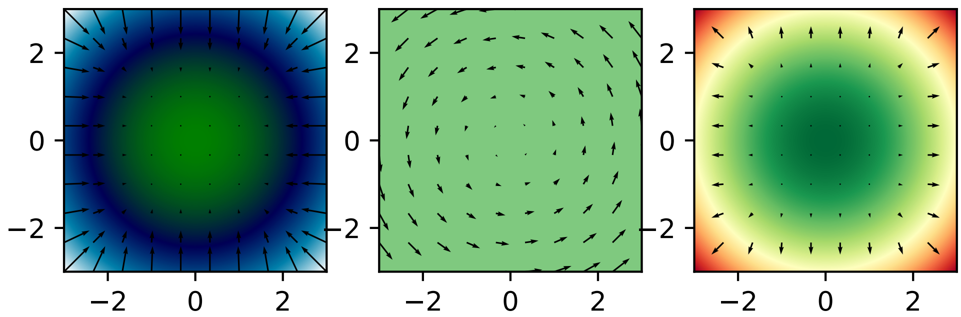


Figure 4.5: La divergence indique si le champ de vecteurs aura tendence à envoyer les éléments vers l'éxtérieur (divergence positive) ou l'intérieur (divergence négative). Sur cet exemple, la figure de gauche représente le champ de vecteurs $(x, y) \longmapsto (-x^3, -y^3)$, de divergence $(x, y) \longmapsto -3(x^2+y^2)$ qui est positive, la figuge centrale représente le champ de vecteurs $(x, y) \longmapsto (-y, x)$, de divergence nulle (c'est une rotation) et la figure de droite représente le champ de vecteurs $(x, y) \longmapsto (x^3, y^3)$, de divergence $(x, y) \longmapsto 3(x^2 + y^2)$ qui est négative.

Définition (Laplacien)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit le **laplacien de** f, noté Δf, par:

$$\begin{array}{rccc} \Delta f : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(x) \end{array}$$

Exemple. *Le laplacien de la fonction $x \longmapsto ||x||_2^2$ est la fonction constante $x \longmapsto 2d$. En effet, chaque dérivée partielle seconde par rapport à x_k est donnée par $x \longmapsto 1$, puis on fait la somme.*

Remarque. *Le gradient, la divergence et le laplacien sont tous les trois des opérateurs linéaires, c'est-à-dire que, pour deux fonctions f et g vérifiant les bonnes hypothèses, on a $\overrightarrow{\nabla}(f+g) = \overrightarrow{\nabla} f + \overrightarrow{\nabla} g$, $div(f+g) = div(f) + div(g)$ et $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$.*

Proposition (Quelques formules)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert.

- ⋆ Soient $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors:

$$div(f\ g) = f\ div(g) + \overrightarrow{\nabla} f \cdot g$$

- ⋆ Soient $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. On a alors:

$$div(\overrightarrow{\nabla} f) = \Delta f$$

et

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\overrightarrow{\nabla} f \cdot \overrightarrow{\nabla} g$$

4.5.2 Etude de champs de vecteurs en petite dimension

L'intérêt de cette sous-section est d'étudier des champs de vecteurs en dimension 2 et 3, et en particulier d'établir si un champ de vecteur est un champ de gradient ou pas.

Définition (Champ de gradient)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est un **champ de gradient** si il existe une fonction $U : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $x \in \Omega$, $f(x) = \overrightarrow{\nabla} U(x)$.

Remarque. *La fonction U est parfois appelée primitive de f. On peut aussi dire que f dérive de U.*

Définition (Rotationnel)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert et $\overrightarrow{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs (une fonction de classe $\mathcal{C}^1$). On définit le **rotationnel de** $\overrightarrow{F}$, noté $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F}$ ou encore $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}$ par:

$$\begin{array}{rccc} \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{F} : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \begin{bmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial F_y}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial F_x}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial F_z}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial F_y}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial F_x}{\partial y}(x,y,z) \end{bmatrix} \end{array}$$

où $\overrightarrow{F} = F_x \overrightarrow{i} + F_y \overrightarrow{j} + F_y \overrightarrow{k}$, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ étant le repère othonormé "classique" de $\mathbb{R}^3$ (la base canonique).

Remarque. *En mécanique sdes fluides, un écroulement va être modélisé par un champ de vecteur, en particulier pour la fitesse du fluide. Un rotationnel non nul indique la présence de tourbillons dans cet écoulement.*

Méthode

Pour calculer le rotationnel d'un champ de vecteurs, on utilise la même technique que pour le produit vectoriel:

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{vmatrix}$$

Exemple. *Soit $f(x,y,z) = (y, -x, e^z)$. On a, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{rot} f(x,y,z) = (0,0,-2)$.*

Proposition **(Propriété du rotationnel)**

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Alors nous avons $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{\nabla} f) = \overrightarrow{0}$.

Théorème **(Champ de gardient)**

- ⋆ **Dimension** **2:** Soit $\overrightarrow{F}(x,y) = F_x(x,y)\overrightarrow{i} + F_y(x,y)\overrightarrow{j}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Alors $\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$ si et seulement si $\overrightarrow{F}$ est un champ de gradient.
- ⋆ **Dimension** **3:** Soit $\overrightarrow{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\overrightarrow{i} + F_y(x,y,z)\overrightarrow{j} + F_z(x,y,z)\overrightarrow{k}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. Alors $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{F}$ est un champ de gradient.

Exemple. *Donnons deux exemples.*

- ⋆ ***Dimension* 2:** *Soit le champ de vecteur $\overrightarrow{F}(x,y) = y\overrightarrow{i} - x\overrightarrow{j}$. On a: $\frac{\partial}{\partial y}(y) = 1$ (première composante) et $\frac{\partial}{\partial x}(-x) = -1$ (seconde composante). Donc ce champ de vecteurs n'est pas un champ de gradient.*
- ⋆ ***Dimension* 3:** *Soit le champ de vecteurs:*

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y - \sin(x)e^z)\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + \cos(x)e^z\overrightarrow{k}$$

Calculons le rotationnel de ce champ de vecteurs:

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left|\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{c} y - \sin(x)e^z \\ x \\ \cos(x)e^z \end{array}\right. = \left|\begin{array}{c} 0-0 \\ -\sin(x)e^z + \sin(x)e^z \\ 1-1 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.$$

Nous avons ainsi $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, donc il existe une fonction $U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \overrightarrow{\nabla} U(x,y,z)$. Nous avons donc:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z) &= y - \sin(x)e^z \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z) &= x \\ \frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) &= \cos(x)e^z \end{aligned}$$

- *On a ainsi, par intégration par rapport à x:*

$$U(x,y,z) = xy + \cos(x)e^z + A(y,z)$$

où A est une fonction inconnue (constante d'intégration par rapport à x).

- *Dérivons par rapport à y, on obtient:* $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z) = x + \frac{\partial A}{\partial y}(y,z)$, *soit* $\frac{\partial A}{\partial y}(y,z) = 0$. *En intégrant par rapport à y, on a* $A(y,z) = B(z)$, *soit:*

$$U(x,y,z) \quad = \quad xy + \cos(x)e^z + B(z)$$

où B est une fonction inconnue (constante d'intégration par rapport à y).

- *Dérivons par rapport à z, on obtient:* $\frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) = \cos(x)e^z + B'(z)$ *soit* $B'(z) = 0$. *Donc* $B(z) = C$, *où* $C \in \mathbb{R}$ *est une constante.*

Finalament, on obtient:

$$U(x,y,z) \quad = \quad xy + \cos(x)e^z + C$$

pour n'importe quelle constante $C \in \mathbb{R}$. On vérifie facilement que cette fonction convient.

Remarque. *Il est également possible "d'intuiter" la fonction recherchée, en particulier lorsque x, y et z jouent des rôles symétriques.*

Exemple. *Soit le champ de vecteurs:*

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) \quad = \quad x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

Un rapide calcul montre que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, *donc il existe une fonction* $U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que, pour tout* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \overrightarrow{\nabla}U(x,y,z)$. *Nous avons donc:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z) &= x \\
\frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z) &= y \\
\frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) &= z
\end{aligned}$$

La fonction $U(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$ *convient.*

Chapitre 5

Surfaces et courbes

Dans ce chapitre, nous étudions les courbes et surfaces de niveau, respectivement pour les fonctions de deux ou trois variables. Quelques éléments supplémentaires secont donnés pour les fonctions de deux variables.

5.1 Courbes et surfaces de niveau

Définition (Courbe et surface de niveau)

Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle:

- ⋆ **Courbe de niveau** λ associée à la fonction $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ l'ensemble des points vérifiant l'équation $f(x, y) = \lambda$.
- ⋆ **Surface de niveau** λ associée à la fonction $(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z)$ l'ensemble des points vérifiant l'équation $f(x, y, z) = \lambda$.

Remarque. *Il se peut que certaines courbes ou surfaces de niveau ne comportent qu'un seul point, voire aucun !*

Exemple. 1. *Les courbes de niveau λ associées à la fonction $(x, y) \longrightarrow x^2 + y^2$ sont:*

- *Les cercles de centre $(0, 0)$ et de rayon λ si $\lambda \geqslant 0$ et en particulier le point $(0, 0)$ si $\lambda = 0$.*
- *Aucun point si $\lambda < 0$.*

2. *Les surfaces de niveau λ associées à la fonction $(x, y, z) \longrightarrow x^2 + y^2 + z^2$ sont:*

- *Les sphères de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon λ si $\lambda \geqslant 0$ et en particulier le point $(0, 0, 0)$ si $\lambda = 0$.*
- *Aucun point si $\lambda < 0$.*

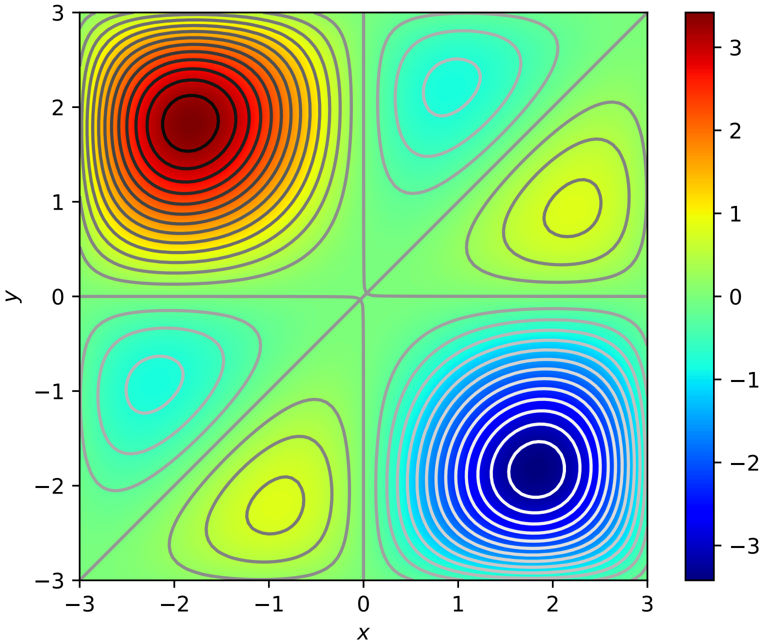


Figure 5.1: Courbes de niveau d'une fonction de deux variables. Plus la ligne est blanche, plus la valeur de la fonction est basse, plus elle est noire, plus la valeur est élevée.

Proposition (Lien entre gradient et courbe-surface de niveau)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ ouvert, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $t \longmapsto \gamma(t)$ un chemin défini sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, de classe $\mathcal{C}^1$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(\gamma(t)) = \lambda$. On a alors:

$$\dot{\gamma}(t) \cdot \overrightarrow{\nabla} f(\gamma(t)) \quad = \quad 0 \tag{5.1}$$

Géométriquement, cela signifie que le long d'une courbe ou sur une surface de niveau, le gradient est orthogonal à la courbe.

Remarque. *En deux dimensions, outre le fait de traduire que la variation d'altitude est nulle le long d'une courbe de niveau, la proposition indique que lorsqu'un déplacement a lieu sur une courbe de niveau, le vecteur vitesse y est orthogonal au gradient.*

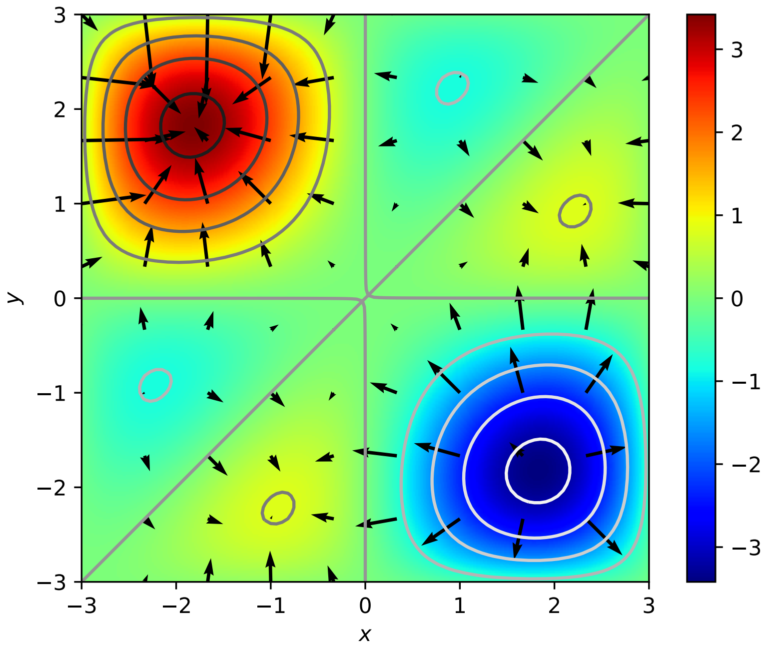


Figure 5.2: Illustration de la proposition précédente dans le cas d'une fonction de deux variables. Les flèches représentant le gradient croisent bien perpendiculairement les courbes de niveau.

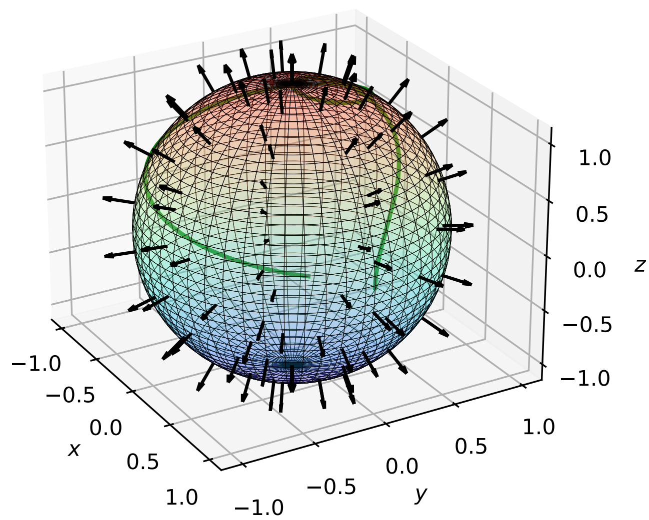


Figure 5.3: Illustration de la proposition précédente dans le cas de la fonction de trois variables $(x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2$. La surface de niveau 1 correspond à la sphère centrée en l'origine et de rayon 1. Les flèches représentant le gradient croisent bien perpendiculairement la surface de niveau sur laquelle un chemin est présent (en vert).

5.2 Plan tangent au graphe d'une fonction de deux variables

Dans cette section, on va généraliser la notion de tangente à une courbe, bien connue dans le cas d'une fonction d'une variable.

Définition (Plan tangent)

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $(a, b) \in \Omega$. On définit le **plan tangent à** f **en** (a, b) comme étant le plan d'équation cartésienne

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \tag{5.2}$$

Remarques. ⋆ *Ce plan tangent correspond à l'approximation linéaire de f au point (a, b) (développement limité à l'ordre 1).*

⋆ *Dans le cas où (a, b) est un point critique, le plzn tangent est simplement le plan d'équation $z = f(a, b)$. Dans ce cas:*

- *Si (a, b) est un minimum local, alors le graphe de f est localement situé au-dessus de son plan tangent.*

- *Si (a, b) est un maximum local, alors le graphe de f est localement situé au-dessous de son plan tangent.*

- *Si (a, b) est un point selle, alors le graphe de f est localement traversé par son plan tangent.*

Exemple. *Le plan tangent au graphe de la fonction $f : (x, y) \longmapsto \sin(x)\sin(y)$ au point $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ est le plan d'équation cartésienne:*

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

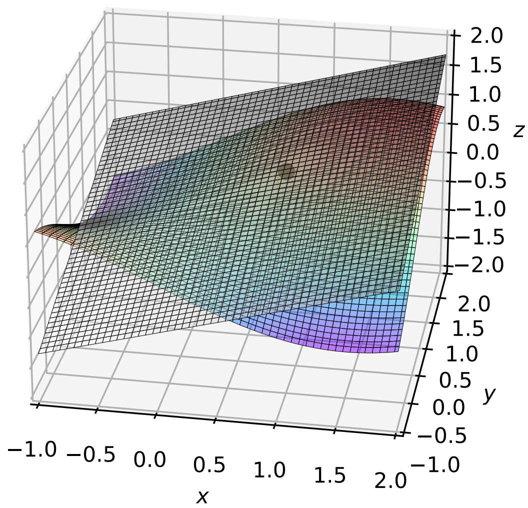


Figure 5.4: Illustration du graphe de la fonction f et de son plan tangent en $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Bibliographie

[1] C. Bertault, *cours MPSI*, 2023.

[2] J. Shih, *Calcul différentiel en dimension finie*, cours de L2, 2023.