NOM et Prénom: ....

Outils Mathématiques 3 - CC n°2

Durée: 1 heure

DOCUMENTS, TÉLÉPHONES ET CALCULATRICES SONT INTERDITS

Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Une importance sera accordée dans la notation à la qualité des raisonnements ainsi qu'au soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 (5 points)

Dessiner les deux ensembles suivants:

1) (2,5 points)

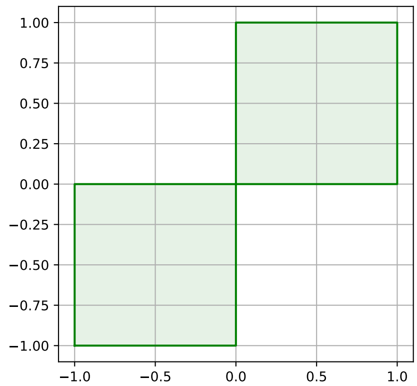
$$\{[-1,0] \times [-1,0]\} \cup \{[0,1] \times [0,1]\}$$

2) (2,5 points)

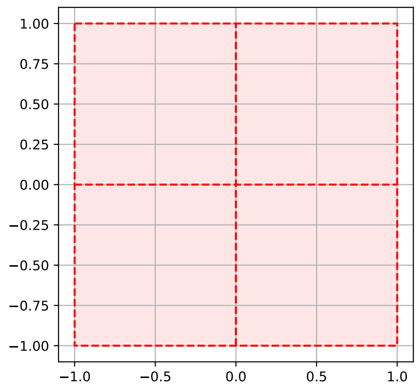
$$\{]-1,0[\cup]0,1[\} \times \{]-1,0[\cup]0,1[\}$$

Correction

1)



2)



Exercice 2 (5 points)
On considère la fonction f définie comme suit:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{\ln(xy)}{\sqrt{x^2+y^2-4}} \end{array}$$

1) (2,5 points) Déterminer le domaine de définition de f.

2) (2,5 points) Dessiner le domaine de définition déterminé dans la question précédente.

Correction

1) Tout d'abord, la fonction $(x,y) \mapsto \ln(xy)$ est correctement définie si et seulement si $xy > 0$, autrement dit sur le domaine:

$$\mathcal{D}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0 \text{ ou } x, y < 0\right\}$$

De plus, la fonction $(x,y) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$ est correctement définie si et seulement si $x^2+y^2-4 > 0$, autrement dit sur le domaine:

$$\mathcal{D}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} > 2\right\}$$

Finalement, f est définie sur le domaine $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$:

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, x^2+y^2 > 2 \text{ et } x, y < 0, x^2+y^2 > 2\right\}$$

2)

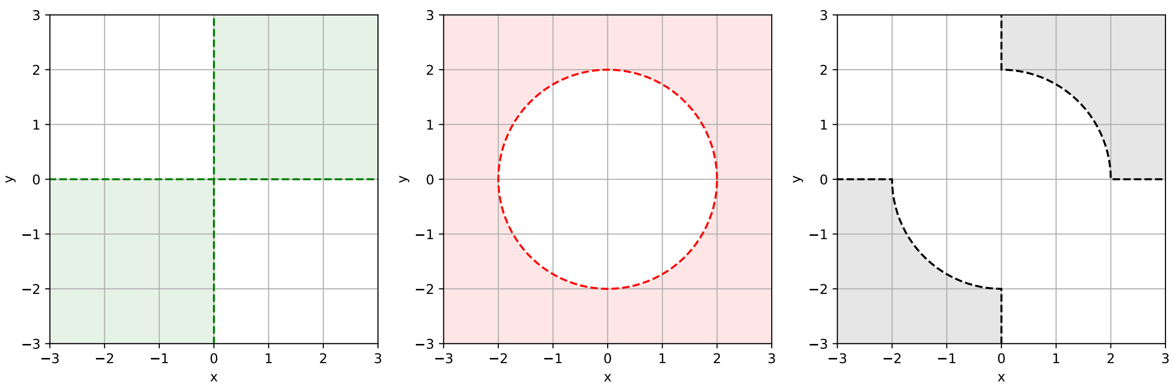


Figure 1: Domaine $\mathcal{D}_1$ (en vert, à gauche), domaine $\mathcal{D}_2$ (en rouge, au centre) et domaine $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ (en noir, à droite).

Exercice 3 (5 points)
On considère la fonction définie comme suit:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^4)+1-\cos(y)}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

1) (2 points) Calculer la limite $\lim_{x\to 0} f(x,0)$.

2) (2 points) Calculer la limite $\lim_{y\to 0} f(0,y)$.

3) (1 point) Que dire à propos de la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Correction

1) On sait que, pour tout $x \neq 0$, $f(x,0) = \frac{\sin(x^4)}{x^4}$, donc, en utilisant le fait que $\frac{\sin(h)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1$, on a:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 1$$

2) On sait que, pour tout $y \neq 0$, $f(0,y) = \frac{\cos(y)}{y^2}$, donc, en utilisant le fait que $\frac{1-\cos(h)}{h^2} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, on a:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \frac{1}{2}$$

3) Si f admet une limite en $(0,0)$, alors on a:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{y\to 0} f(0,y)$$

Or, ces limites sont différentes, donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

Exercice 4 (5 points)
On considère la fonction définie comme suit:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{5(x^2+y^2)} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

1) (3,5 points) Montrer la majoration:

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{2}{5}\left(x^2+y^2\right)$$

2) (1,5 point) En déduire que la fonction f est continue sur le plan $\mathbb{R}^2$.

Correction

1) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a ainsi:

$$|f(x,y)| = \frac{|x|^4}{5(x^2+y^2)} + \frac{|y|^4}{5(x^2+y^2)}$$

Or, $|x|, |y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$, donc on a:

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= \frac{(x^2+y^2)^2}{5(x^2+y^2)} + \frac{(x^2+y^2)^2}{5(x^2+y^2)} \\ &\leqslant \frac{2(x^2+y^2)^2}{5(x^2+y^2)} \\ &\leqslant \frac{2}{5}(x^2+y^2) \end{aligned}$$

ce qui est la majoration souhaitée.

2) Si $(x,y) \neq (0,0)$, le numérateur et le dénominateur sde f sont des fonctions continues, et le dénominateur ne s'y annule pas, donc, par quotient, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus, par la majoration précédente, on a bien $f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = f(0,0)$ donc f est continue en $(0,0)$.