OM3 - Exercices complémentaires

1 - Feuille 1: Suites et séries

Exercice 24

Montrer que toute suite convergente est bornée.

Exercice 25

Déterminer si les suites suivantes convergent, et, dans le cas positif, donner leur limite:

$$u_n = (-3)^n, \ \ u_n = \frac{\sin(n)}{n}, \ \ u_n = \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)^5}, \ \ u_n = \frac{2^n}{n^2}, \ \ u_n = \frac{10^n}{n!}$$

Exercice 26

Montrer que les suites suivantes convergent et donner leur limite:

$$u_n = \frac{n^7 + n^5 + n - 1}{5n^7 + 12n^4 - 3n^2}, \ \ u_n = \frac{3n^2 + \cos(n)}{5n^2}, \ \ u_n = \frac{2^n + 6n^2 + \ln(n)}{5^n - 12n^4 + 42}$$

Exercice 27

Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné par:

$$u_n = \frac{\pi^n + \sqrt{n}}{4^n}, \ \ u_n = \frac{3n^2 + 10n + 11}{22n^4}, \ \ u_n = \frac{n^{2022}}{2022^n}$$

2 - Feuille 2: Fonctions à plusieurs variables, limites et continuité

Exercice 17

On considère trois réels $a < b \leqslant c < d$. Dessiner les domaines suivants:

1) La boule ouverte de centre $(0,1)$ et de rayon 1, $\mathbb{B}((0,1),1)$.
2) La boule fermée de centre $(-1,3)$ et de rayon 2, $\overline{\mathbb{B}}((-1,3),2)$.
3) $\mathbb{B}((0,0),1) \cap \{[0,1] \times [0,1]\}$.
4) $$[0,1] \times]2,3[$$
5) $$\{[a,b] \times [a,b]\} \cup \{[c,d] \times [c,d]\}$$

6)
$$\{]a,b[\cup]c,d[\} \times \{]a,b[\cup]c,d[\}$$

3 - Feuille 3: Fonctions à plusieurs variables, dérivabilité

Exercice 18

On considère la fonction f définie comme suit:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ (x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en $(0,0)$.
2) Calculer les dérivées partielles au premier ordre de f en $(0,0)$.
3) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.
4) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 19

Soit $\alpha > 0$. On considère la fonction f définie comme suit:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ (x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $\alpha > \frac{1}{2}$, la fonction f est continue en $(0,0)$.
2) Pour tout $\alpha > \frac{1}{2}$, calculer les dérivées partielles au premier ordre de f en $(0,0)$.
3) Montrer que pour tout $\alpha > 1$, la fonction f est différentiable en $(0,0)$.
4) Que dire de la différentiabilité de f lorsque $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$?

Exercice 20

On considère la fonction f définie comme suit:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ (x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en $(0,0)$.
2) Calculer les dérivées partielles au premier ordre de f en $(0,0)$.
3) La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

3 - Feuille 5: Fonctions à plusieurs variables, extrêma

Exercice 24

Pour chacune des fonctions suivantes:

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & x^2 - xy + y^2 \\ g(x,y) & = & x^2 + 2xy + y^2 + 6 \\ h(x,y) & = & x^3 + x^2 + xy - y^2 + 10 \end{array}$$

1) Déterminer les points critiques de la fonction.

2) Calculer la matrice hessienne de la fonction.

3) Déterminer si possible la nature des points critiques.

Exercice 25

On considère la fonction:

$$f(x,y) \quad = \quad x(x+1)^2 - y^2$$

1) Déterminer les points critiques de f.

2) Calculer la matrice hessienne de f.

3) Déterminer si possible la nature des points critiques.

Exercice 26

On considère la fonction:

$$f(x,y) \quad = \quad (x-y)^2(1-x+y)$$

1) Déterminer les points critiques de f.

2) Calculer la matrice hessienne de f.

3) Déterminer si possible la nature des points critiques.

Exercice 27

1) On considère la fonction:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & xyz + \sin(xy) - e^{z^2} \end{array}$$

. Donner la matrice jacobienne de f.

2) On considère la fonction:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & xy + e^{xy} \end{array}$$

.

Donner la matrice hessienne de g.