Étude de séries à termes positifs

Objectif : Dire si la série $\sum u_n$ (où $u_n \geq 0$) diverge ou converge (Nature de la série)

I - Séries de référence

Théorème :

- Série géométrique : $\sum a^n$ $\begin{cases} \text{converge si } a < 1 \\ \text{diverge si } a \geq 1 \end{cases}$
  $a \geq 0$.
- Série de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $\begin{cases} \text{converge si } \alpha > 1 \\ \text{diverge si } \alpha \leq 1 \end{cases}$
  $\alpha > 0$

II - Comparaison

Proposition :

- Suites équivalentes : Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ et $u_n, v_n \geq 0$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature
- Comparaison : - Si, pour n assez grand, $0 \leq v_n \leq u_n$ et $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge
  - Si, pour n assez grand, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

III - Complément : limite d'une suite

Proposition :

- $\dfrac{a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } q > p \\ \frac{a_p}{b_q} & \text{si } q = p \\ +\infty & \text{si } q < p \end{cases}$
  $a_p, b_q \neq 0$
  $p, q \in \mathbb{N}$ fixés
  (équivalent en $n \to +\infty$: $\frac{a_p}{b_q} \cdot n^{p-q}$).
- Croissance comparée : $\forall \alpha, \beta > 0$; $\forall a \geq 0$:
  $* \ \frac{\ln(n)^\alpha}{n^\beta} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\quad * \ \frac{n^\alpha}{a^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\quad * \ \frac{a^n}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
- Si $(u_n)_n$ est bornée et $(v_n)_n$ est de limite nulle alors $u_n v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$