Formules de Cardan

Leçons 102,144

Théorèe (Formules de Cardan pour les équations cubiques)

Soient $p, q \in \mathbb{R}^*$. Les racines complexes du polynôme $X^3 + pX + q$ sont calculables explicitement. Soit Δ le discriminant du polynôme (i.e. de 'équation $z^3+pz+q=0$), donné par:

$$\Delta \quad = \quad -\left(4p^3 + 27q^2\right)$$

On a alors trois cas possibles:

1. Si $\Delta > 0$, alors P admet trois racines réelles distinctes.
2. Si $\Delta = 0$, alors P admet des racines réelles, dont une multiple.
3. Si $\Delta < 0$, alors P admet une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

Voici le plan de la démonstration:

1. **Analyse:** Montrer les trois propriétés en posant $z = u + v$, puis en distinguant les trois cas $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$.
2. **Synthèse:** Volontairement admise, car repose sur des calculs.

Démonstration. *Dans l'équation $z^3 + pz + q = 0$, posons $z = u + v$. On obtient alors:*

$$\begin{aligned} z^3 + pz + q = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0 \end{aligned}$$

On impose un système de deux équations à deux inconnues en posant:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u^3 + v^3 &=& -q \\ 3uv + p &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} U + V &=& -q \\ UV &=& \frac{-p^3}{27} \end{array} \right. \quad \text{où } (U, V) = (u^3, v^3)$$

U et V sont donc solution d'un système somme-produit, i.e. sont racines du polynôme $Q = X^2 + qX - \frac{p^3}{27}$. Soit alors Δ' le discriminant de ce polynôme. Il est donné par:

$$\Delta' = q^2 + \frac{4p^3}{27} = -\frac{1}{27}\left[-\left(4p^3 + 27q^2\right)\right] = -\frac{1}{27}\Delta$$

$\star$ *Si $\Delta' > 0$, i.e. $\Delta < 0$, alors S admet deux racines réelles:*

$$x_+ = \frac{-q + \sqrt{\Delta'}}{2} \text{ et } x_-* = \frac{-q - \sqrt{\Delta'}}{2}$$

$$\text{Donc: } u \in \left\{ \sqrt[3]{x_+}, \sqrt[3]{x_+}e^{\frac{2i\pi}{3}}, \sqrt[3]{x_+}e^{\frac{4i\pi}{3}} \right\} \text{ et } v \in \left\{ \sqrt[3]{x_-}, \sqrt[3]{x_-}e^{\frac{2i\pi}{3}}, \sqrt[3]{x_-}e^{\frac{4i\pi}{3}} \right\}$$

De plus, on a: $x_+x_- = \frac{1}{4}(q^2 - \Delta') = -\frac{p^3}{27}$*, d'où* $\sqrt[3]{x_+x_-} = \frac{-p}{3}$.

$$\textit{On a ainsi: } uv = \sqrt[3]{x_+x_-}e^{\frac{2(k_++k_-)i\pi}{3}} = -\frac{p}{3}e^{\frac{2(k_++k_-)i\pi}{3}}, k_+, k_- \in [\![0,2]\!]$$

$$\textit{Donc: } 3uv + p = p\left(-e^{2(k_++k_-)i\pi} + 1\right) = 0$$

Donc on a $k_+ + k_- \equiv 0\ [3]$*, i.e.* $(k_+, k_-) \in \{(0,0),(1,2),(2,1)\}$*, donnant ainsi nos trois racines:*

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{x_+} + \sqrt[3]{x_-} \\
z_2 &= \sqrt[3]{x_+}e^{\frac{2i\pi}{3}} + \sqrt[3]{x_-}e^{\frac{4i\pi}{3}} \\
&= \sqrt[3]{x_+}e^{\frac{2i\pi}{3}} + \sqrt[3]{x_-}e^{-\frac{2i\pi}{3}} \\
z_3 &= \sqrt[3]{x_+}e^{-\frac{2i\pi}{3}} + \sqrt[3]{x_-}e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
&= \overline{z_2}
\end{aligned}$$

z_1 *est réelle,* z_2 *et* z_3 *sont complexes conjuguées.*

⋆ *Si* $\Delta' = 0$*, i.e.* $\Delta = 0$*, alors* Q *admet une racine double* $x_0 = \frac{-q}{2}$.

$$\textit{Donc: } u, v \in \left\{\sqrt[3]{x_0}, \sqrt[3]{x_0}e^{\frac{2i\pi}{3}}, \sqrt[3]{x_0}e^{\frac{4i\pi}{3}}\right\}$$

$$\textit{On a alors } 3uv + p = 0, \textit{ soit } 3\sqrt[3]{x_0^2}e^{\frac{2(k_++k_-)i\pi}{3}} + p = 0, k_+, k_- \in [\![0,2]\!]$$

$$\textit{Or, } \sqrt[3]{x_0^2} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{4}} \overset{\Delta'=0}{=} \sqrt[3]{\frac{-p^3}{27}} = \frac{-p}{3} \textit{ donc: } 3uv + p = p\left(-e^{2(k_++k_-)i\pi} + 1\right) = 0$$

Cela impose ainsi $k_+ + k_- \equiv 0\ [3]$*, donc on a trois racines:*

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2\sqrt[3]{x_0} \\
z_2 &= \sqrt[3]{x_0}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{\frac{4i\pi}{3}}\right) \\
&= 2\sqrt[3]{x_0}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
z_3 &= \sqrt[3]{x_0}\left(e^{\frac{4i\pi}{3}} + e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) \\
&= z_2
\end{aligned}$$

Les racines sont toutes réelles, et $z_2 = z_3$ *est une racine double.*

⋆ *Si* $\Delta' < 0$, *i.e.* $\Delta > 0$, *alors* Q *admet deux racines complexes conjuguées:*

$$x_+ = \frac{-q + i\sqrt{|\Delta'|}}{2} \text{ et } x_- = \frac{-q - i\sqrt{|\Delta'|}}{2}$$

On écrit $x_+ = re^{i\theta}$, *avec* $r > 0$, *et* $\theta \in]0, 2\pi[\setminus \{0\}$, *donc* $x_- = re^{-i\theta}$.

$$\text{Donc: } u \in \left\{ \sqrt[3]{x_+}e^{i\frac{\theta}{3}}, \sqrt[3]{x_+}e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}, \sqrt[3]{x_+}e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)} \right\}$$

$$\text{et: } v \in \left\{ \sqrt[3]{x_+}e^{-i\frac{\theta}{3}}, \sqrt[3]{x_+}e^{i\left(-\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}, \sqrt[3]{x_+}e^{i\left(-\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)} \right\}$$

$$\text{Donc: } 3uv + p = 0 \text{ et } uv = \sqrt[3]{r^2}e^{2i(k_+ + k_-)\frac{i\pi}{3}}, k_+, k_- \in [\![0, 2]\!]$$

$$\text{Or: } r^2 = |x_+|^2 = \frac{q^2}{4} + \frac{|\Delta'|}{4} = \frac{1}{4}\left[q^2 - \left(q^2 + \frac{4p^3}{27}\right)\right] = -\frac{p^3}{27} > 0 \text{ (par hypothèse sur } r\text{)}$$

$$\text{Donc: } \sqrt[3]{r^2} = -\frac{p}{3} \text{ et } 3uv + p = p\left(-e^{2i(k_+ + k_-)\pi} + 1\right) = 0 \text{ donc } k_+ + k_- \equiv 0 \ [3]$$

D'où nos trois racines:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{r}\left(e^{i\frac{\theta}{3}} + e^{-i\frac{\theta}{3}}\right) \\
&= 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \\
z_2 &= \sqrt[3]{r}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} + e^{i\left(-\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}\right) \\
&= 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \\
z_3 &= \sqrt[3]{r}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)} + e^{i\left(-\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}\right) \\
&= 2\sqrt[3]{r}\cos\left(-\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Donc z_1, z_2 *et* z_3 *sont réelles distinctes.*

■

Remarques. *1. Tant que $a \in \mathbb{R}$, on peut donner un sens correct à $\sqrt[3]{a}$, via la fonction racine cubique.*

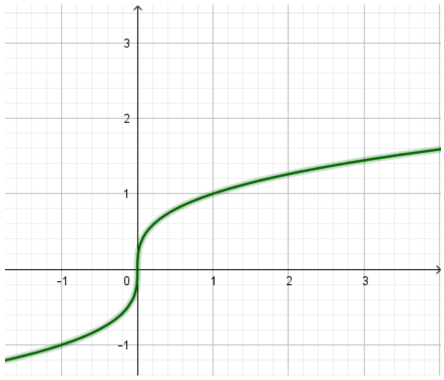

Figure 1: Courbe de la fonction racine cubique.

2. Voici trois cas de figure pour le signe du discriminant:

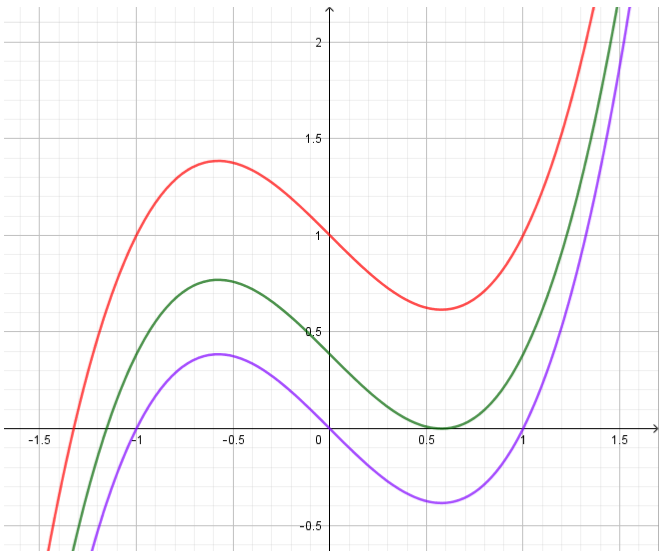

Figure 2: Cas où $\Delta > 0$ (courbe violette), $\Delta = 0$ (courbe verte) et $\Delta < 0$ (courbe rouge).

3. Pour trouver les racines du polynôme $R = X^3 + bX + cX + d$, où $b, c, d \in \mathbb{R}$, il suffit de poser $Y = X - \frac{b}{3}$, pour se ramener à un polynôme de la forme $Y^3 + pY + q$, on en déduit les racines en Y, puis celles en X, i.e. celles de P.