Inégalités de convexité et applications

Leçons 229,253

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, $p, q \in [1, +\infty]$. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, et on note, pour $f \in L^p(x, \mathcal{A}, \mu)$:

$$||f||_{L^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } p < +\infty$$

Dans le pas où $p = +\infty$, on pose, pour $f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, $||f||_{L^\infty} = \sup_X |f|$

On suppose que p et q sont conjugués, i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Théorème (Inégalités pour les fonctions convexes)

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient $x_1, \cdots, x_n \in I$ et $t_1, \cdots, t_n \in [0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. On a alors:

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n t_i f(x_i) \quad (1)$$

2. **Inégalité arithmético-géométrique:** Soient $x_1, \cdots, x_n \geqslant 0$. On a alors:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Démonstration. *1. La preuve du premier résultat se fait par récurrence sur n.*

- ⋆ ***Initialisation:*** *Pour $n = 2$, on a $f(t_1x_1 + t_2x_2) \leqslant t_1f(x_1) + t_2f(x_2)$ par définition de fonction convexe.*
- ⋆ ***Hérédité:*** *Soit $n \geqslant 2$ fixé, et supposons l'inégalité (1) vérifiée (hypothèse de récurrence). Alors, si $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$, on a:*

$$\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i = (1 - t_{n+1}) \sum_{i=1}^n t'_i x_i + t_{n+1} x_{n+1}$$

avec, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $t'_i = \frac{t_i}{1 - t_{n+1}}$, ce qui est bien une combinaison convexe. Par convexité de f, on a:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) \leqslant (1 - t_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^n t'_i x_i\right) + t_{n+1} f(x_{n+1})$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence (inégalité (1)) au premier terme, on a:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) &\leqslant (1-t_{n+1})\sum_{i=1}^{n} t_i' f(x_i) + t_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) + t_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n+1} t_i f(x_i) \end{aligned}$$

2. *On applique l'inégalité (1) avec la fonction $-\ln$, qui est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, pour tout $x > 0$, $-\ln''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$. On prend également, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $t_i = \frac{1}{n}$, on a bien une combinaison convexe. L'inégalité étant évidente si l'un des x_i est nul, on peut supposer que $x_1, \cdots, x_n > 0$. On obtient ainsi:*

$$-\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i\right) \leqslant -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(x_i)$$

Les propriétés algébriques du logarithme assurent que:

$$-\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant -\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right) \tag{2}$$

En appliquant la fonction $x \mapsto e^{-x}$, décroissante sur $\mathbb{R}$, à l'inégalité (2), il vient ainsi:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

■

Lemme (Inégalité d'Young)

Soient $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$, $x \in X$ (X est introduit au début) tel que $|f(x)|, |g(x)| > 0$. Alors on a:

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q$$

Démonstration. *Par convxité de* $-\ln$*, il vient, puisque* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$*,*

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{p}|f(x)|^p+\frac{1}{q}|g(x)|^q\right) &\geqslant \frac{1}{p}\ln\left(|f(x)|^p\right)+\frac{1}{q}\ln\left(|g(x)|^q\right)\\ &\geqslant \ln|f(x)|+\ln|g(x)|\\ &\geqslant \ln|f(x)g(x)| \qquad (3)\end{aligned}$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on applique exp *à l'inégalité* (3)*, donnant ainsi l'inégalité souhaitée.*

∎

Théorème (Deux inégalités importantes en intégration)

1. **Inégalité de Hölder:** Soient $f \in L^p(X)$ et $g \in L^q(X)$. Alors $fg \in L^1(X)$ et on a:

$$||fg||_{L^1} \leqslant ||f||_{L^p} \cdot ||g||_{L^q}$$

2. **Inégalité de Minkowski:** Soient $f, g \in L^p(X)$. Alors $f+g \in L^p(X)$ et on a:

$$||f+g||_{L^p} \quad ||f||_{L^p} + \leqslant ||g||_{L^p}$$

Démonstration.

1. *Soient* $f \in L^p(X)$ *et* $g \in L^q(X)$*. L'inégalité d'Young reste valable si* $|f(x)|$ *ou* $|g(x)|$ *est nul, donc on a* $|fg| \leqslant \frac{1}{p}|f|^p+\frac{1}{q}|g|^q$*, donc, par comparaison,* $fg \in L^1(X)$*. Par croissance de l'intégrale, on a ainsi:*

$$||fg||_{L^1} \leqslant \frac{1}{p}\,||f||_{L^p}^p + \frac{1}{q}\,||g||_{L^q}^q$$

En appliquant ce résultat aux fonctions $\frac{f}{||f||_{L^p}}$ *et* $\frac{g}{||g||_{L^q}}$*, on a alors:*

$$\frac{||fg||_{L^1}}{||f||_{L^p}\,||g||_{L^q}} \leqslant 1$$

ce qui donne bien l'inégalité demandée.

2. *Soient* $f, g \in L^p(X)$*. Si* $p \in \{1, +\infty\}$*, alors l'inégalité de Minkowski est triviale. On peut alors supposer que* $p \in]1, +\infty[$*. Par convexité de la fonction* $x \mapsto x^p$*, on a:*

$$\left(\frac{|f+g|}{2}\right)^p \leqslant \left(\frac{|f|+|g|}{2}\right)^p \leqslant \frac{1}{2}|f|^p + \frac{1}{2}|g|^p$$

Donc $|f+g|^p \leqslant 2^p(|f|^p+|g|^p)$*. Par comparaison,* $f+g \in L^p(X)$*.*

$$\textit{Ainsi on a:} \quad ||f+g||_{L^p}^p \leqslant \int_X |f+g|^p \mathrm{d}\mu = \int_X |f+g|^{p-1}|f+g| \mathrm{d}\mu$$

$$\textit{soit} \quad ||f+g||_{L^p}^p \quad \leqslant \quad \int_X |f+g|^{p-1}|f| \mathrm{d}\mu + \int_X |f+g|^{p-1}|g| \mathrm{d}\mu \tag{4}$$

$q = \frac{p}{p-1}$ est le conjugué de p. Donc, comme $|f+g|^{(p-1)q} = |f+g|^p$, on a $|f+g|^{p-1} \in L^q(X)$.

$$\textit{Donc} \quad \left|\left||f+g|^{p-1}\right|\right|_{L^1}^q = \int_X |f+g|^{q(p-1)} \mathrm{d}\mu = \int_X |f+g|^p \mathrm{d}\mu = ||f+g||_{L^p}^p$$

$$\textit{Ainsi,} \quad \left|\left||f+g|^{p-1}\right|\right|_{L^1} = ||f+g||_{L^p}^{\frac{p}{q}} = ||f+g||_{L^p}^{p-1}$$

Donc, dans les deux intégrale de droite de l'inégalité (4), il vient, par l'inégalité de Hölder:

$$\begin{aligned} ||f+g||_{L^p}^p &\leqslant ||f||_{L^p} \left|\left||f+g|^{p-1}\right|\right|_{L^q} + ||g||_{L^p} \left|\left||f+g|^{p-1}\right|\right|_{L^q} \\ &\leqslant ||f+g||_{L^p}^{p-1} \left\{||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}\right\} \end{aligned}$$

En simplifiant par $||f+g||_{L^p}^{p-1}$ (si $f+g=0$, le résultat est trivial), on a l'inégalité voulue.

■

Remarques. *1. L'inégalité de Hölder se généralise au cas de n fonctions dans $f_1 \in L^{p_1}(X), \cdots, f_n \in L^{p_n}(X)$, tels que $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$, donnant ainsi:*

$$||f_1 \cdots f_n||_{L^1} \quad \leqslant \quad ||f_1||_{L^{p_1}} \cdots ||f_n||_{L^{p_n}}$$

2. L'inégalité de Minkowski confère à $L^p(X)$ une structure d'espace vectoriel normé. Cet espace vectoriel normé est par ailleurs un espace de Banach (cf. théorème de Riez-Fischer).

Reférence. *H.Brezis, Analyse Fonctionnelle (utilisé pour montrer l'inégalité de Minkowski)*