# Théorème de Cauchy-Lipschitz global

**Leçons 207,221**

Dans tout ce qui suit, $d$ est un entier naturel supérieur ou égal à 1, $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t_0 \in I$.

**Théorème (Théorème de Cauchy-Lipschitz global)**

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, globalement lipschitzienne en sa seconde variable, de constante de Lipschitz notée $L$. Pour toute condition initiale $y_0 \in \mathbb{R}^d$, le problème de Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

possède une unique solution globale sur $I$.

Voici le plan de la démonstration:

1. Si $I$ est fermé borné (compact), on montre le théorème avec un argument de point fixe pour une certaine norme.

2. Si $I$ est quelconque, on écrit $I$ comme une réunion d'intervalles fermés bornés puis on conclut en utilisant l'unicité.

**Démonstration.** *1. Si $I$ est fermé borné, alors $(\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d), ||\cdot||_{L^\infty(I)})$ est un espace de Banach, et $(\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d), N(\cdot)_{L^\infty(I)})$ est également complet, avec $N(\cdot)_{L^\infty(I)}$ donnée, pour tout $y \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$, par:*

$$N(y)_{L^\infty(I)} \quad = \quad \sup_{t \in I} \left[ e^{-2L|t-t_0|} ||y(t)|| \right]$$

*Soit l'application $\Phi : \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$ donnée, pour tous $y \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d), t \in I$, par:*

$$\Phi(y)(t) \quad = \quad y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \mathrm{d}s$$

*Il est clair, par continuité de $f$, que $\Phi$ est bien définie. Soient $t \in I$ et $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$:*

$$\begin{aligned}
||\Phi(y_1)(t)-\Phi(y_2)(t)|| &= \left|\left|\int_{t_0}^{t} f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s))\mathrm{d}s\right|\right| \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} ||f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s))||\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant L\int_{t_0}^{t} ||y_1(s)-y_2(s)||\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant L\int_{t_0}^{t} e^{2L|s-t_0}\,||y_1(s)-y_2(s)||\,e^{-2L|s-t_0}\mathrm{d}s \\
&\leqslant L\int_{t_0}^{t} e^{2L|s-t_0|}N(y_1-y_2)_{L^\infty(I)}\mathrm{d}s \\
&\leqslant LN(y_1-y_2)_{L^\infty(I)}\int_{t_0}^{t} e^{2L|s-t_0|}\mathrm{d}s \\
&\leqslant LN(y_1-y_2)_{L^\infty(I)}\cdot\frac{1}{2L}\left[e^{2L|t-t_0|}-1\right] \\
&\leqslant \frac{1}{2}N(y_1-y_2)_{L^\infty(I)}e^{2L|t-t_0|}
\end{aligned}$$

*D'où* $e^{-2L|t-t_0|}\,||\Phi(y_1)(t)-\Phi(y_2)(t)|| \leqslant \frac{1}{2}N(y_1-y_2)_{L^\infty(I)}$

*En passant au* sup *à gauche, il vient alors cette inégalité:*

$$N\left(\Phi(y_1)-\Phi(y_2)\right)_{L^\infty(I)} \leqslant \frac{1}{2}N\left(y_1-y_2\right)_{L^\infty(I)}$$

$\Phi$ *est strictement contractante, donc, par le théorème du point fixe de Banach-Picard, admet un unique point fixe, ce qui conclut.*

2. *On traite le cas où* $I$ *n'est pas fermé borné:*

   ⋆ *Si* $I=]a,b[$, *avec* $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$:

   - *Si* $I=]-\infty,b[$ *avec* $b<+\infty$, *alors on écrit:*

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\underbrace{\left[b-(n+2),b-\frac{1}{n+1}\right]}_{:=I_n}$$

$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante d'intervalles fermés bornés. Soit* $y_n$ *la solution du problème de Cauchy sur* $I_n$. *Par unicité, on a* $y_{n+1}|_{I_n}=y_n$ *puisque* $I_{n+1}\cap I_n=I_n$. *Donc on a une unique solution globale* $y_n$ *sur chaque* $I_n$, *donc une unique solution* $y$ *sur* $I$, *où* $y|_{I_n}=y_n$.

- *Si* $I = ]a, b[$*, avec* $-\infty < a < b < +\infty$*, alors on écrit:*

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{n+1}, b - \frac{1}{n+1}\right]$$

*et le même raisonnement s'applique*

⋆ *Si* $I = ]-\infty, a]$ *ou* $I = [b, +\infty[$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$*, alors on écrit:*

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a - (n+1), a]$$

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [b, b + n + 1]$$

*et, là encore, c'est le même raisonnement qui s'applique. En fait, l'idée est d'écrire* $I$ *comme une réunion croissante d'intervalles fermés bornés et d'appliquer le même raisonnement à chaque fois.*

*Si* $(\widetilde{y}, \widetilde{I})$ *est une autre solution du problème de Cauchy, définie sur* $I$*, on a ainsi, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $\widetilde{y}|_{I_n} = y|_{I_n}$*, donc finalement,* $\widetilde{y} = y$

■