Équation de la chaleur sur le cercle

Leçons 222,246

Théorème (Equation de la chaleur sur le cercle)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^2$, 2π-périodique. Alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$, 2π-périodique en espace vérifiant l'équation suivante:

$$[H] \left\{ \begin{array}{lcccc} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & , & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x,0) & = & f(x) & , & x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

De plus, $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$

Voici le plan de la démonstration, utilisant un raisonnement par analyse-synthèse:

1. On fait l'analyse en explicitant *la* solution à l'aide des séries de Fourier
2. On fait la synthèse en montrant les propriétés de régularité de u à l'aide des théorèmes de régularité des séries de fonctions, et surtout en montrant que u ainsi construite vérifie bien l'équation de la chaleur.

Démonstration. *1. On fait l'analyse: Soit $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ une solution de $[H]$.*

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$, 2π-périodique. Par le théorème de Dirichlet, f est somme de sa série de Fourier (avec convergence uniforme de la série), donc il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ (suite de limite nulle lorsque $|n| \to +\infty$) telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$$

De même, pour tout $t > 0$, $u(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc est également somme de sa série de Fourier, ainsi, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$$

avec, pour tous $n \in \mathbb{Z}$, $t > 0$,

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} u(x,t) \mathrm{d}x$$

Montrons que c_n est solution d'une équation différentielle:
Soit $n \in \mathbb{Z}$, et soit g_n donnée par:

$$g_n : \begin{array}{ccc} [0,2\pi] \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{1}{2\pi} e^{-inx} u(x,t) \end{array}$$

- $\forall t \geqslant 0$, $x \mapsto g_n(x,t)$ *est mesurable (car continue)*
- $\forall x \in [0, 2\pi]$, $g_n(x, \cdot)$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$ *et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$
- $\forall T > \delta > 0$, $\forall x \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{array}{rcl} \forall t \in [0,T], \quad |g_n(x,t)| & \leqslant & \frac{1}{2\pi}\|u\|_{L^\infty([0,2\pi]\times[0,T])} \\ \forall t \in [\delta,T], \quad \left|\frac{\partial g_n}{\partial t}(x,t)\right| & \leqslant & \frac{1}{2\pi}\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{L^\infty([0,2\pi]\times[\delta,T])} \end{array}$$

Donc, en vertu du théorème de régularité des intégrales à paramètre, c_n *est continue sur* $\mathbb{R}_+$ *et est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$*. De plus, on a, pour tout* $t > 0$,

$$\begin{array}{rcl} c_n'(t) & = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x \\ & \overset{[H]}{=} & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{d}x \\ & \overset{IPP1}{=} & \frac{1}{2\pi}\underbrace{\left[e^{-inx}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]_{x=0}^{x=2\pi}}_{=0} + \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}x \\ & \overset{IPP2}{=} & \frac{in}{2\pi}\underbrace{\left[e^{-inx}u(x,t)\right]_{x=0}^{x=2\pi}}_{=0} - \frac{n^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}u(x,t)\mathrm{d}x \\ & = & -n^2 c_n(t) \end{array}$$

En résolvant cette équation différentielle, on obtient que, pour tout $t > 0$, $c_n(t) = A_n e^{-n^2 t}$ *où* $A_n \in \mathbb{C}$*. Lorsque l'on fait tendre* t *vers* 0*, la continuité de* c_n *en* 0 *assure que:* $A_n = c_n(0)$*. Or, on a:*

$$\begin{array}{rcl} c_n(0) & = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}u(x,0)\mathrm{d}x \\ & = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}f(x)\mathrm{d}x \\ & = & a_n \end{array}$$

Donc, pour tout $t > 0$*, on a:*

$$c_n(t) = a_n e^{-n^2 t}$$

Ainsi, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-n^2 t} e^{inx}$$

2. *On fait la synthèse. Montrons que u ainsi construite vérifie bien l'équation de la chaleur $[H]$.*

Posons, pour $n \in \mathbb{Z}$, la fonction φ_n donnée par:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_n : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x,t) & \longmapsto & a_n e^{-n^2 t} e^{-inx} \end{array}$$

φ_n est régulière en ses deux variables sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Soient alors $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ et $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial t^\beta} \varphi_n(x,t) = a_n \left(-n^2\right)^\beta (in)^\alpha e^{-n^2 t} e^{-inx}$$

Soient $\delta > 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [\delta, +\infty[$:

$$\left| \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial t^\beta} \varphi_n(x,t) \right| \leqslant |a_n| n^{2\beta+\alpha} e^{-n^2 \delta}$$

C'est une suite qui décroît en $\mathcal{O}\left(e^{-\frac{\delta n^2}{2}}\right)$. De plus, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a:

$$|\varphi_n(x,t)| \leqslant |a_n|$$

Cette suite décroît en $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$.

Par le théorème de régularité des séries de fonctions, on en déduit donc que $u \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\right) \cap \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*\right)$, de plus, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= -\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n n^2 e^{-n^2 t} e^{inx} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= -\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n n^2 e^{-n^2 t} e^{inx} \end{aligned}$$

Ainsi, u vérifie bien l'équation de la chaleur $[H]$ avec les bonnes propriétés de régularité.

■

Remarques. *1. En réalité, on peut choisir f moins régulière, en la prenant continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la série de Fourier de f converge normalement vers f, et on a $(a_n) \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.*

2. On peut résoudre l'équation pour des conditions $T-$périodiques, où $T > 0$. Il suffit pour cela de poser, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) \quad = \quad f\left(\frac{T}{\pi}x\right)$$

On a ainsi:

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{T}{\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{Tx}{\pi} + T\right) = f\left(\frac{Tx}{\pi}\right) = g(x)$$

3. On peut résoudre $[H]$ avec un coefficient de diffusion D différent de 1:

$$[H] \ \left\{ \begin{array}{rcccc} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = & D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & , & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x,0) & = & f(x) & , & x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Il suffit pour cela de changer t en $\frac{t}{D}$, et $(x,t) \mapsto u\left(x, \frac{t}{D}\right)$ vérifie $[H]$ avec $D = 1$.

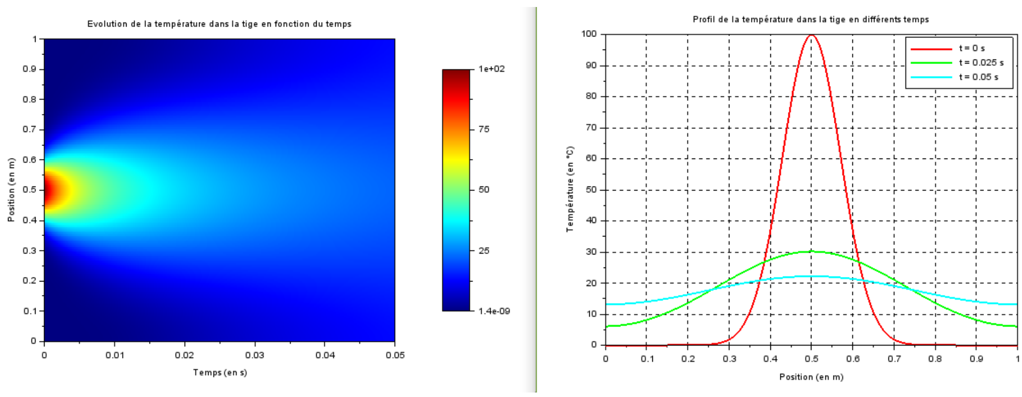

Figure 1: Simulations numériques de l'équation $[H]$ sur l'intervalle $[0, 1]$ (tige) avec conditions périodiques au bord.