Équation des ondes en une dimension

Domaines: Calcul différentiel, Équations aux dérivées partielles

Théorème (Équation des ondes 1D)

Soient $c > 0$, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors l'équation aux dérivées partielles:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(\cdot, 0) = f \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = g \end{cases} \tag{1}$$

admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ donnée, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, par:

$$u(x,t) \quad = \quad \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\mathrm{d}s \tag{2}$$

Voici le plan de la démonstration, qui se fait par analyse-synthèse:

1. Montrer, via le changement de variable $(\sigma, \tau) = (x + ct, x - ct)$, que u s'écrit sous la forme:

   $$u(x,t) \quad = \quad F_1(x+ct) + F_2(x-ct)$$

   pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ et $F_1, F_2 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. A l'aide des conditions initiales, calculer $F1$ et F_2 en fonction de f et g, et écrire u sous la forme (2).

3. Montrer que u est bien solution de (1)

Démonstration. *1.* ***Analyse:*** *Soit u une solution de* (1)*. Faisons le changement de variable:*

$$\begin{cases} \sigma &=& x + ct \\ \tau &=& x - ct \end{cases}$$

ce qui revient à écrire:

$$\begin{cases} x &=& \frac{1}{2}(\sigma + \tau) \\ t &=& \frac{1}{2c}(\sigma - \tau) \end{cases}$$

Soit alors:

$$v(\sigma,\tau) = u\left(\frac{1}{2}(\sigma+\tau), \frac{1}{2c}(\sigma-\tau)\right)$$

On a ainsi, puisque $v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ *(par composition de fonctions de classe* $\mathcal{C}^2$*), en utilisant la règle de la chaîne:*

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma}(\sigma,\tau) = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{1}{2}(\sigma+\tau), \frac{1}{2c}(\sigma-\tau)\right) + \frac{1}{2c}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{1}{2}(\sigma+\tau), \frac{1}{2c}(\sigma-\tau)\right)$$

ainsi que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial \tau\partial \sigma}(\sigma,\tau) &= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}(\sigma+\tau), \frac{1}{2c}(\sigma-\tau)\right) - \frac{1}{4c}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\left(\frac{1}{2}(\sigma+\tau), \frac{1}{2c}(\sigma-\tau)\right)\\ &+ \frac{1}{4c}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\left(\frac{1}{2}(\sigma+\tau), \frac{1}{2c}(\sigma-\tau)\right) - \frac{1}{4c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(\frac{1}{2}(\sigma+\tau), \frac{1}{2c}(\sigma-\tau)\right)\end{aligned}$$

Comme $u \in \mathcal{C}^{2,2}_{x,t}(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$*, le théorème de Schwarz assure que:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}$$

donnant ainsi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial \tau\partial \sigma}(\sigma,\tau) &= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}(\sigma+\tau), \frac{1}{2c}(\sigma-\tau)\right) - \frac{1}{4c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(\frac{1}{2}(\sigma+\tau), \frac{1}{2c}(\sigma-\tau)\right)\\ &= \frac{-1}{4c^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, il existe $f_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *telle que, pour tout* $(\sigma,\tau)\in\mathbb{R}^2$*:*

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma}(\sigma,\tau) = f_1(\sigma)$$

et ainsi, il existe $F_2 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *telle que, pour tout* $(\sigma,\tau)\in\mathbb{R}^2$*:*

$$v(\sigma,\tau) = F_2(\tau) + \int_0^\sigma f_1(s)\mathrm{d}s$$

Posons, pour tout $\sigma\in\mathbb{R}$*:*

$$F_1(\sigma) = \int_0^\sigma f_1(s)\mathrm{d}s$$

On a ainsi, en revenant aux variables $(x,t) \in \mathbb{R}^2$*:*

$$u(x,t) = F_1(x+ct) + F_2(x-ct) \tag{3}$$

où $F_1, F_2 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2. *Déterminons* F_1 *et* F_2 *en fonction de* f *et* g*. En évaluant en* $t=0$*, on a, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{array}{rcccl} u(x,0) & = & F_1(x) + F_2(x) & = & f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & cF_1'(x) - cF_2'(x) & = & g(x) \end{array}$$

En intégrant la seconde équation, il vient:

$$\begin{array}{rcl} F_1(x) + F_2(x) & = & f(x) \\ F_1(x) - F_1(0) - F_2(x) + F_2(0) & = & \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_0^x g(s)\mathrm{d}s \end{array}$$

On obtient ainsi un système en $F_1(x)$ *et* $F_2(x)$*:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F_1(x) + F_2(x) & = & f(x) \\ F_1(x) - F_2(x) & = & F_1(0) - F_2(0) + \frac{1}{c}\int_0^x g(s)\mathrm{d}s \end{array} \right.$$

On obtient ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{array}{rcl} F_1(x) & = & \dfrac{1}{2}f(x) + \dfrac{F_1(0) - F_2(0)}{2} + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^x g(s)\mathrm{d}s \\ F_2(x) & = & \dfrac{1}{2}f(x) - \dfrac{F_1(0) - F_2(0)}{2} - \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^x g(s)\mathrm{d}s \end{array}$$

Donc, en utilisant l'expression (3)*, il vient, pour tout* $(x,t) \in \mathbb{R}^2$*:*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\mathrm{d}s$$

3. ***Synthèse:*** *Comme* f *et* g *sont respectivement de classe* $\mathcal{C}^2$ *st* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$*,* u *est donc de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *par composition. Ainsi, en utilisant à nouveau la règle de la chaîne, on a, pour tout* $(x,t) \in \mathbb{R}^2$*:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{c}{2}\left[f'(x+ct) - f'(x-ct)\right] + \frac{1}{2}\left[g(x+ct) + g(x-ct)\right] \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= \frac{1}{2}\left[f'(x+ct) + f'(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\left[g(x+ct) - g(x-ct)\right]
\end{aligned}$$

Ainsi que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{c^2}{2}\left[f''(x+ct) + f''(x-ct)\right] + \frac{c}{2}\left[g'(x+ct) - g'(x-ct)\right] \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{1}{2}\left[f''(x+ct) + f''(x-ct)\right] + \frac{1}{2}\left[g'(x+ct) + g'(x-ct)\right]
\end{aligned}$$

D'une part, on remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= f(x) \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a bien, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

Ce qui montre que u est bien solution de (1).

■

Remarques. *1. La solution de (1 est bien unique. En effet, on a trouvé une unique expression de u dans l'analyse. Pour être plus convaincant, si u_1 et u_2 sont deux solutions de (1), alors la différence $u_2 - u_1$ est également solution de (1), mais avec $f = g \equiv 0$. Ainsi, l'expression (1) montre bien que $u_2 - u_1 \equiv 0$, i.e. $u_1 = u_2$.*

2. Les expressions (2) ou encore (3) montrent bien le caractère de propagation de la solution dans deux directions opposées à la vitesse c (F_1 dans le sens des x croissants et F_2 dans le sens des x décroissants).

3. On dit que l'équation des ondes est une équation aux dérivées partielles linéaire hyperbolique, en particulier, on a certaines propriétés, communes avec les équations de transport par exemple:

- ⋆ *Si f et g sont régulières, alors $x \mapsto u(x,t)$ sera régulière pour tout $t > 0$.*
- ⋆ *Si f et g sont à support compact, alors $x \mapsto u(x,t)$ sera à support compact pour tout $t > 0$.*

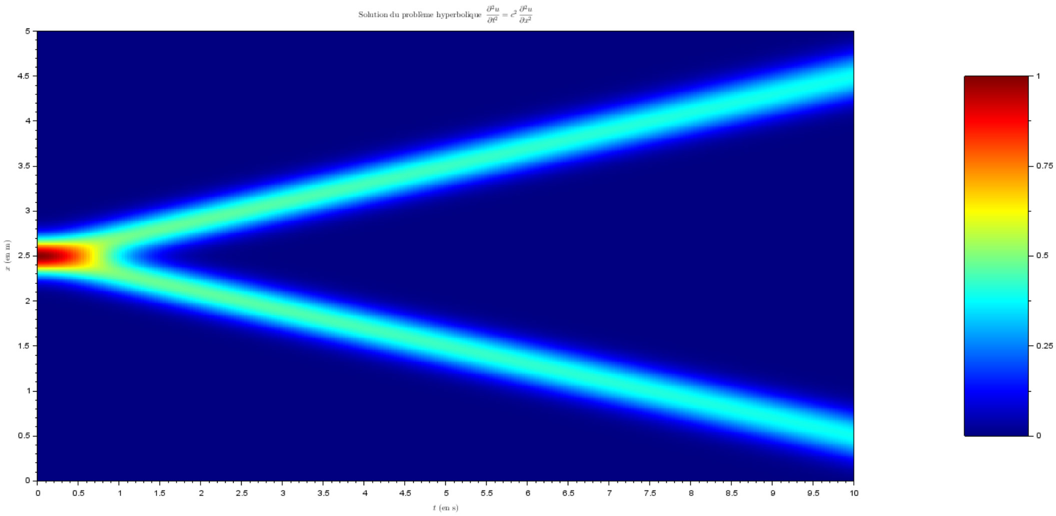

Figure 1: Simulation numérique de l'équation des ondes avec f une fonction gaussienne et $g = 0$