Équation de Schrödinger sur le cercle

Domaines: Équations aux dérivées partielles, Séries de Fourier, Suites et séries de fonctions, Intégrales à paramètre

Théorème (Equation de Schrödinger sur le cercle)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, 2π-périodique. Alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, 2π-périodique en espace vérifiant l'équation suivante:

$$[S] \left\{ \begin{array}{rcccc} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = & i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & , & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) & = & f(x) & , & x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Voici le plan de la démonstration, utilisant un raisonnement par analyse-synthèse:

1. On fait l'analyse en explicitant *la* solution à l'aide des séries de Fourier
2. On fait la synthèse en montrant les propriétés de régularité de u à l'aide des théorèmes de régularité des séries de fonctions, et surtout en montrant que u ainsi construite vérifie bien l'équation de Schrödinger.

Démonstration. *1. On fait l'analyse: Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ une solution de $[S]$.*

Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$, 2π-périodique. Par le théorème de Dirichlet, f est somme de sa série de Fourier (avec convergence uniforme de la série), donc il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ (suite de limite nulle lorsque $|n| \to +\infty$) telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$$

De même, pour tous $t > 0$, $u(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc est également somme de sa série de Fourier, ainsi, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$$

avec, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $t > 0$,

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} u(x,t) \mathrm{d}x$$

Montrons que c_n est solution d'une équation différentielle:
Soit $n \in \mathbb{Z}$, et soit g_n donnée par:

$$g_n : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{1}{2\pi} e^{-inx} u(x,t) \end{array}$$

- $\forall t \geqslant 0$, $x \mapsto g_n(x,t)$ *est mesurable (car continue)*
- $\forall x \in [0, 2\pi]$, $g_n(x, \cdot)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+$
- $\forall T > 0$, $\forall x \in [0, 2\pi]$, $\forall t \in [0, T]$:

$$\left|\frac{\partial g_n}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\right|_{L^\infty([0,2\pi]\times[0,T])}$$

Donc, en vertu du théorème de régularité des intégrales à paramètre, c_n *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+$. *De plus, on a, pour tout* $t \geqslant 0$*:*

$$\begin{array}{rcl} c_n'(t) & = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x \\ & \stackrel{[S]}{=} & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{d}x \\ & \stackrel{IPP1}{=} & \frac{i}{2\pi}\underbrace{\left[e^{-inx}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]_{x=0}^{x=2\pi}}_{=0} - \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}x \\ & \stackrel{IPP2}{=} & -\frac{n}{2\pi}\underbrace{\left[e^{-inx}u(x,t)\right]_{x=0}^{x=2\pi}}_{=0} - \frac{in^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}u(x,t)\mathrm{d}x \\ & = & -in^2 c_n(t) \end{array}$$

En résolvant cette équation différentielle, on obtient que, pour tout $t \geqslant 0$, $c_n(t) = A_n e^{-n^2 t}$ *où* $A_n \in \mathbb{C}$. *Lorsque l'on fait tendre* t *vers* 0, *la continuité de* c_n *en* 0 *assure que:* $A_n = c_n(0)$. *Or, on a:*

$$\begin{array}{rcl} c_n(0) & = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}u(x,0)\mathrm{d}x \\ & = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}f(x)\mathrm{d}x \\ & = & a_n \end{array}$$

Donc, pour tout $t \geqslant 0$, *on a:*

$$c_n(t) \;=\; a_n e^{-in^2 t}$$

Ainsi, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$,

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-in^2 t} e^{inx}$$

2. *On fait la synthèse. Montrons que u ainsi construite vérifie bien l'équation de Schrödinger [S].*

   Posons, pour $n \in \mathbb{Z}$, la fonction φ_n donnée par:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_n : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x,t) & \longmapsto & a_n e^{-in^2 t} e^{-inx} \end{array}$$

   φ_n est régulière en ses deux variables sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Soient alors $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ et $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial t^\beta} \varphi_n(x,t) = a_n \left(-in^2\right)^\beta (in)^\alpha e^{-n^2 t} e^{-inx}$$

   Ainsi, on a:

$$\left| \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial t^\beta} \varphi_n(x,t) \right| \leqslant |a_n| n^{2\beta+\alpha}$$

   Cette suite décroît en $o\left(\frac{1}{n^p}\right)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

   Par le théorème de régularité des séries de fonctions, on en déduit donc que $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, de plus, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= -i \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n n^2 e^{-in^2 t} e^{inx} \\ i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= -i \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n n^2 e^{-in^2 t} e^{inx} \end{aligned}$$

   Ainsi, u vérifie bien l'équation de Schrödinger [S] avec les bonnes propriétés de régularité.

■

Remarques. *1. Contrairement à l'équation de la chaleur, il n'y a pas d'effets régularisants, et la condition initiale doit être régulière afin que cette régularité se conserve au cours du temps.*

2. On peut résoudre l'équation pour des conditions $T-$périodiques, où $T > 0$. Il suffit pour cela de poser, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) \quad = \quad f\left(\frac{T}{\pi}x\right)$$

On a ainsi:

$$g(x+2\pi) = f\left(\frac{T}{\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{Tx}{\pi}+T\right) = f\left(\frac{Tx}{\pi}\right) = g(x)$$

3. On peut résoudre $[S]$ avec un coefficient de "diffusion" D différent de 1:

$$[H] \quad \left\{ \begin{array}{rclcc} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = & iD\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & , & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x,0) & = & f(x) & , & x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Il suffit pour cela de changer t en $\frac{t}{D}$, et $(x,t) \mapsto u\left(x, \frac{t}{D}\right)$ vérifie $[S]$ avec $D = 1$. Cela devient intéressant lorsque $D = \frac{\hbar}{2m}$, où m est la masse de la particule étudiée et $\hbar$ est la constante de Planck réduite.