Une estimation autour de la loi centrée réduite

Domaines: Calcul intégral, Interversion de limites et d'intégrales

Théorème (Estimation)

Soient $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $M > 0$, on a:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X| \geqslant M) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \sum_{j=0}^{p} \frac{(-1)^j (2j+1)! e^{-\frac{M^2}{2}}}{2^j j! M^{2j+1}} \right. \\
&+ \left. (-1)^{p+1} \frac{(2p+1)!}{2^p p!} \int_M^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+2}} \mathrm{d}x \right\} \\
&\underset{M\to+\infty}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{M} + \mathcal{O}\left(\frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{M^3} \right) \\
&\underset{M\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{M}
\end{aligned}$$

Voici le plan de la démonstration:

1. On montre la première égalité par récurrence sur p.
2. On en déduit la seconde égalité en montrant que le premier terme de l'égalité domine tous les autres termes, y compris l'intégrale, en faisant appel à un argument de convergence dominée.

Démonstration. *1. Montrons la première égalité par récurrence:*

- ***Initialisation:*** *Au rang $p = 0$, on a:*

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant M) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_M^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

Soit $T > M$:

$$\int_M^T e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \int_M^T \frac{x e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} \mathrm{d}x$$

Une intégration par parties assure que:

$$\int_M^T e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} \right]_{x=M}^{x=T} - \int_M^T \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2} \mathrm{d}x$$

Donc, comme, par croissance comparée, pour tout $\alpha \geqslant 0$, $x \mapsto \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^\alpha} \in L^1([1,+\infty[)$, *on a, si* $T \to +\infty$*:*

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_M^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{M} + (-1)^{0+1} \frac{(2 \cdot 0+1)!}{2^0 0!} \int_M^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2\cdot 0+2}} \mathrm{d}x$$

donc:

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant M) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{M} - \int_M^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2} \mathrm{d}x \right\}$$

- ***Hérédité:*** *Supposons la formule vraie pour un rang p quelconque, i.e. pour tout* $M > 0$*:*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X| \geqslant M) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \sum_{j=0}^{p} \frac{(-1)^j (2j+1)! e^{-\frac{M^2}{2}}}{2^j j! M^{2j+1}} \right. \\ &+ \left. (-1)^{p+1} \frac{(2p+1)!}{2^p p!} \int_M^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+2}} \mathrm{d}x \right\} \end{aligned}$$

Soit $T > M$*:*

$$\int_M^T \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+2}} \mathrm{d}x = \int_M^T \frac{x e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+3}} \mathrm{d}x$$

Une intégration par parties assure que:

$$\int_M^T \frac{x e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+3}} \mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+3}} \right]_{x=M}^{x=T} - (2p+3) \int_M^T \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+4}} \mathrm{d}x$$

Donc, comme, par croissance comparée, pour tout $\alpha \geqslant 0$, $x \mapsto \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^\alpha} \in L^1([1,+\infty[)$, *on a, si* $T \to +\infty$*:*

$$\int_M^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+2}} \mathrm{d}x = \frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{M^{2p+3}} - (2p+3) \int_M^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+4}} \mathrm{d}x$$

donc:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X| \geqslant M) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \sum_{j=0}^{p} \frac{(-1)^j (2j+1)! e^{-\frac{M^2}{2}}}{2^j j! M^{2j+1}} + \frac{(-1)^{p+2}(2p+1)!(2p+3)}{2^p p!} \frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{M^{2p+3}} \right. \\ &+ \left. (-1)^{p+1} \frac{(2p+1)!(2p+3)}{2^p p!} \int_M^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+4}} \mathrm{d}x \right\} \end{aligned}$$

or, on a:

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^{p+2}(2p+1)!(2p+3)}{2^p p!} &= \frac{(-1)^{p+2}(2p+1)!(2p+2)(2p+3)}{2^p p! 2(p+1)}\\ &= \frac{(-1)^{p+2}(2p+3)!}{2^{p+1}(p+1)!}\end{aligned}$$

donc:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X| \geqslant M) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\sum_{j=0}^{p+1} \frac{(-1)^j(2j+1)!e^{-\frac{M^2}{2}}}{2^j j! M^{2j+1}}\right.\\ &+ \left.(-1)^{p+1}\frac{(2p+1)!(2p+3)}{2^p p!}\int_M^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+4}}\mathrm{d}x\right\}\end{aligned}$$

cela montre la récurrence.

2. *Pour montrer la deuxième formule, montrons que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:*

$$\left(\frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{M^{2p+1}}\right)^{-1}\int_M^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+2}}\mathrm{d}x \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $M > 0$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{M^{2p+1}}\right)^{-1}\int_M^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+2}}\mathrm{d}x &= \int_M^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{M}{x}\right)^{2p+1}}_{\leqslant 1}\frac{e^{\frac{M^2-x^2}{2}}}{x}\mathrm{d}x\\ &\leqslant \int_M^{+\infty} \frac{e^{\frac{M^2-x^2}{2}}}{x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

or, $x \mapsto \frac{e^{\frac{M^2-x^2}{2}}}{x} \in L^1([M,+\infty[)$, donc les intégrales utilisées ont bien un sens. donc:

$$\left(\frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{M^{2p+1}}\right)^{-1}\int_M^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+2}}\mathrm{d}x = \int_M^{+\infty}\left(\frac{M}{x}\right)^{2p+1}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}\left(1-\left(\frac{M}{x}\right)^2\right)}}{x}\mathrm{d}x$$

faisons le changement de variable $x = My$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{M}{x}\right)^{2p+1}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}\left(1-\left(\frac{M}{x}\right)^2\right)}}{x} &= \frac{e^{-\frac{(My)^2}{2}\left(1-\frac{1}{y^2}\right)}}{y^{p+2}}\mathrm{d}y\\ x = M &\Leftrightarrow y = 1\\ x \to +\infty &\Leftrightarrow y \to +\infty\end{aligned}$$

donc, par changement de variable:

$$\left(\frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{M^{2p+1}}\right)^{-1}\int_M^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+2}}\mathrm{d}x \quad = \quad \int_1^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(My)^2}{2}\left(1-\frac{1}{y^2}\right)}}{y^{p+2}}\mathrm{d}y$$

or, nous avons:

- Pour tout $y \geqslant 1$:

$$\frac{e^{-\frac{(My)^2}{2}\left(1-\frac{1}{y^2}\right)}}{y^{p+2}} \quad \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

- Pour tous $y \geqslant 1$, $M > 0$:

$$\frac{e^{-\frac{(My)^2}{2}\left(1-\frac{1}{y^2}\right)}}{y^{p+2}} \quad \leqslant \quad \frac{1}{y^{p+2}}$$

or, $y \longmapsto \frac{1}{y^{2p+2}} \in L^1([1,+\infty[)$, donc on a une majoration indépendante du paramètre M par une fonction intégrable.

ainsi, par le théorème de convergence dominée, on a:

$$\left(\frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{M^{2p+1}}\right)^{-1}\int_M^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+2}}\mathrm{d}x \quad \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

on a donc:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X| \geqslant M) \quad &\underset{M\to+\infty}{=} \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j=0}^{p}\frac{(-1)^j(2j+1)!e^{-\frac{M^2}{2}}}{2^j j! M^{2j+1}} + o\left(\frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{M^{2p+1}}\right) \\
&\underset{M\to+\infty}{=} \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{M} + \mathcal{O}\left(\frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{M^3}\right) \\
&\underset{M\to+\infty}{\sim} \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{M}
\end{aligned}$$

Remarques. *1. Si $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, alors, puisque $\frac{X}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$, pour tout $M > 0$, on a:*

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant M) \quad = \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{\sigma}\right| \geqslant \frac{M}{\sigma}\right)$$

donc on a:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X| \geqslant M) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\sum_{j=0}^{p} \frac{(-1)^j (2j+1)! e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M}{\sigma}\right)^2}}{2^j j! \left(\frac{M}{\sigma}\right)^{2j+1}}\right. \\ &+ \left.(-1)^{p+1}\frac{(2p+1)!}{2^p p!}\int_{\frac{M}{\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+2}}\mathrm{d}x\right\} \\ &\underset{M\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sigma}{M}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M}{\sigma}\right)^2}\end{aligned}$$

donc, plus la dispersion σ est grande, moins $\mathbb{P}(|X| \geqslant M)$ diminue rapidement avec M ey plus σ est petite, plus $\mathbb{P}(|X| \geqslant M)$ diminue rapidement avec M, ce qui est cohérent avec la notion d'écart-type.

2. *On a, si $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$:*

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant M) \underset{M\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sigma}{M}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M}{\sigma}\right)^2}$$

ce qui est, pour de grandes valeurs de M, beaucoup plus précis que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev:

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant M) \leqslant \frac{\sigma^2}{M^2}$$