L'équation matricielle $e^A = I_n$

Leçons 153,156,157
Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Théorème (Résolution de l'équation matricielle $e^A = I_n$)

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $e^A = I_n$ si et seulement si ils existent $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $d_1, \cdots, d_n \in 2i\pi\mathbb{Z}$ tels que:

$$A = P^{-1} \begin{bmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{bmatrix} P$$

Voici le plan de la démonstration:

1. Décomposer A, puis e^A à l'aide de la décomposition de Dunford.
2. Montrer que A est diagonalisable
3. Conclure

Démonstration. *1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $e^A = I_n$. La décomposition de Dunford de A assure qu'ils existent $N, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente, et $ND = DN$. De plus, N et D sont des polynômes en A. On a ainsi $e^A = e^{D+N} = e^D e^N$ car $ND = DN$*

De plus, on a:

$$e^N = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!} = I_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!} = I_n + N \sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^{k-1}}{k!} = I_n + N'$$

avec:

$$N' = N \sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^{k-1}}{k!}$$

De plus, N et $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^{k-1}}{k!}$ sont des polynômes en N, donc commutent. Ainsi, N' est nilpotente et c'est un polynôme en A. Ainsi, on a:

$$e^A = e^D e^N = e^D (I_n + N') = e^D = e^D N'$$

$\star$ *D est diagonalisable donc ils existent $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que:*

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Ainsi, on obtient:

$$e^D = P^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P$$

donc e^D est diagonalisable

- ⋆ *e^D et N' sont des polynômes en A donc commutent. Comme N' est nilpotente, $e^D N'$ est aussi nilpotente.*
- ⋆ *e^D et $e^D N'$ sont des polynômes en A donc commutent*

Donc $e^A = e^D + e^D N'$ est la décomposition de Dunford de e^A

2. *Si $e^A = I_n$, alors c'est une autre décomposition de Dunford de e^A (I_n et 0 vérifient bien les propriétés requises). Or, l'unicité de la décomposition de Dunford assure que:*

$$e^A = I_n \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} e^D & = & I_n \\ e^D N' & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} e^D & = & I_n \\ N' & = & 0 \end{array} \right.$$

car $e^D \in GL_n(\mathbb{C})$ (d'inverse e^{-D})

Ainsi, on a:

$$N' = N \sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^{k-1}}{k!} = 0$$

Or, N est nilpotente donc il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que:

$$QNQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\textit{Donc on a: } Q \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^{k-1}}{k!} \right) Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textit{Donc } \det \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^{k-1}}{k!} \right) = 1 \textit{ et } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^{k-1}}{k!} \textit{ est inversible.}$$

d'où $N = 0$, et A est diagonalisable.

3. *A est diagonalisable donc ils existent $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $d_1, \cdots, d_n \in \mathbb{C}$ tels que:*

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{bmatrix}$$

Comme $e^A = I_n$*, on obtient alors:*

$$Pe^AP^{-1} = \begin{bmatrix} e^{d_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{d_n} \end{bmatrix} = I_n$$

Ainsi, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $e^{d_j} = 1$*, soit* $d_j \in 2i\pi\mathbb{Z}$

$$\text{Donc } A = P^{-1} \begin{bmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{bmatrix} P \text{ où } (d_1, \cdots, d_n) \in 2i\pi\mathbb{Z}^n$$

Réciproquement, si ils existent $P \in GL_n(\mathbb{C})$ *et* $d_1, \cdots, d_n \in 2i\pi\mathbb{Z}$ *tels que* A *soit de la forme:*

$$A = P^{-1} \begin{bmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{bmatrix} P$$

$$\text{alors on a } e^A = P^{-1} \begin{bmatrix} e^{d_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{d_n} \end{bmatrix} P = P^{-1}I_nP = I_n$$

Donc A *est bien un antécédent de* I_n *par l'exponentielle.*

■

Reférence. *S.Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, Oraux X-ENS, Algèbre 2*