Théorème de Frobenius pour les invariants de similitude

Leçons 151,154,159

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ est un corps et E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n.

Théorème (Théorème de Frobenius)

Soit $u \in End_{\mathbb{K}}(E)$. Ils existent des sous-espaces vectoriels de E $F_1, \cdots, F_r$, stables par u, tels que:

1. On a cette écriture de E comme la somme directe suivante:

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$$

2. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $u|_{F_i} \in End_{\mathbb{K}}(F_i)$ est cyclique.

3. Si $P_i = \mu_{u|_{F_i}}$ (polynôme minimal), on a: $P_{i+1}|P_i$ pour tout $i \in [\![1, r-1]\!]$

$(P_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ ne dépend que du choix de u et non du choix de la décomposition. C'est la suite des invariants de similitude de u.

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer l'existence de u via la dualité, en montrant le cas $r = 2$ puis en appliquant le tout à F_2.

2. Montrer l'unicité en raisonnant par l'absurde.

Démonstration. *1. **Existence:** Soit μ_u le polynôme minimal de u, soit $k = \deg(\mu_u)$. Soit $\mu_{u,x} \in \mathbb{K}[X]$, où $\{P \in \mathbb{K}[X] : P(u)(x) = 0\} = \langle \mu_{u,x} \rangle$ (Idéal). Soit $x \in E$ tel que $\mu_u = \mu_{u,x}$ (x existe bien, ce résultat est admis).*

Soit $F = \{P(u)(x), P \in \mathbb{K}[X]\}$. F est de dimension k et est stable par u. Comme $\deg(\mu_{u,x}) = k$, $e_1 = x, e_2 = u(x), \cdots, e_k = u^{k-1}(x)$ est une base de F. On la complète en une base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de E. Soit alors $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ la base duale associée, et soit $G = .^{\perp}\Gamma$ (orthogonalité au sens de la dualité), où:

$$\Gamma = \left\{(u^i)^T(e_k^*), i \in \mathbb{N}\right\} = \left\{e_k^* \circ u^i, i \in \mathbb{N}\right\}$$

G est l'ensemble des $x \in E$ tels que la $k-$ième coordonnée de $u^i(x)$ dans la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ soit nulle pour tout $i \in \mathbb{N}$.

G est un s.e.v de E stable par u, montrons que $E = F \oplus G$. On montrera ainsi que:

⋆ $F \cap G = \{0\}$

⋆ $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$

Montrons alors ces deux propriétés.

⋆ *Soit* $y \in F \cap G$. *Supposons que* $y \neq 0$. *On écrit* $y = a_1 e_1 + \cdots + a_p e_p$, *avec* $p \leqslant k$, $a_p \neq 0$. *On compose par* $e_k^* \circ u^{k-p}$: $u^{k-p}(t) = a_1 e_{k-p+1} + \cdots + a_p e_k$.

$$\text{Donc } 0 \overset{y \in G}{=} \left(e_k^* \circ u^{k-p}\right)(y) = a_p \text{ ce qui est absurde, donc } F \cap G = \{0\}$$

⋆ *De plus, comme* $G = .^{\perp}\Gamma = .^{\perp}Vect\,(\Gamma)$, *si on veut montrer que* $\dim(G) = n - \dim(F) = n - k$, *il suffit de montrer que* $\dim\left(Vect(\Gamma)\right) = k$. *Soit* φ *l'application définie par:*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{L}_u = \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\} & \longrightarrow & Vect(\Gamma) \\ & g & \longmapsto & [g \mapsto e_k^* \circ g] \end{array}$$

Par définition de $Vect(\Gamma)$, φ *est surjective. Montrons qu'elle est injective. Soit* $g \in \mathcal{L}_u$ *tel que* $\varphi(g) = e_k^* \circ g = 0$.

On suppose que $g \neq 0$. *Alors* $g = a_0 Id_E + \cdots + a_p u^{p-1} \in \mathcal{L}_u$, *avec* $p \leqslant k$ *et* $a_p \neq 0$. *On a alors:*

$$\begin{array}{rcl} 0 \overset{Hypothse}{=} & \left(e_k^* \circ g\right)\left(u^{k-p}(x)\right) \\ = & e_k^*\left(a_0 u^{k-p}(x) + \cdots + a_p u^{k-1}(x)\right) \\ = & e_k^*\left(a_0 e_{k-p+1} + \cdots + a_p e_k\right) \\ = & a_p \end{array}$$

ce qui est absurde, donc $g = 0$, φ *est injective, et* $\varphi : \mathcal{L}_u \xrightarrow{\sim} Vect(\Gamma)$ *est un isomorphisme, et* $\dim(Vect(\Gamma)) = k$, *d'où* $E = F \oplus G$, *avec* F *et* G *stables par* u.

Posons $F_1 = F$, $P_1 = \mu_{u|_{F_1}} = \mu_u = \mu_{u,x}$, *et* $F_2 = G$, $P_2 = \mu_{u|_G}$.

On a $P_1(u) = P_1(u|_G) = 0$. P_1 *est un polynôme annulateur de* $u|_G$, *donc* $P_2 | P_1$.

On applique ve qui précède à $u|_G$, *et, la dimension étant finie, on a cette somme directe:*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$$

avec, pour tout $i \in [\![1, r-1]\!]$, $P_{i+1} | P_i$.

2. ***Unicité:*** *Supposons l'existence de deux suites $F_1, \cdots, F_r$, $G_1, \cdots, G_s$, tous stables par u, et vérifiant les trois hypothèses de l'énoncé. Notons $P_i = \mu_{u|_{F_i}}$ et $Q_j = \mu_{u|_{G_j}}$. On peut supposer que $r \leqslant s$. On veut montrer que $(P_1, \cdots, P_r) = (Q_1, \cdots, Q_s)$.*

Si ce n'est pas le cas, soit $k_0 \in [\![1, r]\!]$ le plus petit indice tel que $P_k \neq Q_k$. Cet entier k_0 existe, sinon on aurait:

$$\sum_{i=1}^{r} \deg(P_i) = \sum_{i=1}^{r} \dim(F_i) = n = \underbrace{\sum_{j=1}^{r} \deg(Q_j)}_{=\sum_{i=1}^{r} \deg(P_i)} + \sum_{j=r+1}^{s} \deg(Q_j)$$

$$D'où \quad \sum_{j=r+1}^{s} \deg(Q_j) = 0 \ donc \ s \leqslant r$$

Soit $\pi = P_{k_0}(u)$. Comme les F_i sont stables par u, donc par π, on a:

$$\pi(E) = \pi\left(\bigoplus_{i=1}^{r} F_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{r} \pi(F_i) = \bigoplus_{i=1}^{k_0-1} \pi(F_i) \oplus \bigoplus_{i=k_0}^{r} \pi(F_i)$$

$$De \ même \ on \ a: \ \pi(E) = \bigoplus_{j=1}^{k_0-1} \pi(G_j) \oplus \bigoplus_{j=k_0}^{s} \pi(G_j)$$

$$On \ va \ montrer \ que \ \bigoplus_{i=k_0}^{r} \pi(F_i) = \bigoplus_{j=k_0}^{s} \pi(G_j) = \{0\}$$

- ⋆ *Soit $i \in [\![k_0, r]\!]$. Par hypothèse, $P_r | \cdots | P_{k_0+1} | P_{k_0}$, donc $P_i | P_{k_0}$, i.e. $\mu_{u|_{F_i}} | P_{k_0}$, d'où $P_{k_0}(u|_{F_i}) = 0$. Donc $\pi|_{F_i} = P_{k_0}(u)|_{F_i} = P_{k_0}(u|_{F_i}) = 0$, d'où $\dim(F_i) = 0$.*
- ⋆ *Soit $i \in [\![1, k_0 - 1]\!]$. Par hypothèse, $u|_{F_i}$ est cyclique, donc, dans une base $\mathcal{B}_i$ de F_i, on a:*

$$Mat_{\mathcal{B}_i}(u|_{F_i}) = C_{\mu_{u|_{F_i}}} = C_{P_i} = C_{Q_i} = C_{\mu_{u|_{G_i}}} \sim Mat_{\mathcal{B}_i}(u|_{G_i})$$

où $\sim$ est la relation de similitude, et C_P est une matrice compagnon d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.

$$Donc \ P_{k_0}\left(Mat_{\mathcal{C}_i}(u|_{F_i})\right) = Mat_{\mathcal{B}_i}(\pi|_{F_i}) \sim Mat_{\mathcal{B}_i}(\pi|_{G_j}) = P_{k_0}\left(Mat_{\mathcal{B}_i}(u|_{G_i})\right)$$

En passant au rang sur les matrices, on obtient $\dim(\pi(F_i)) = \dim(\pi(G_i))$, donnant ainsi:

$$\begin{aligned} \pi(E) &= \bigoplus_{i=1}^{k_0-1} \pi(F_i) \oplus \underbrace{\bigoplus_{i=k_0}^{r} \pi(F_i)}_{=\{0\}} \\ &= \bigoplus_{j=1}^{k_0-1} \pi(G_j) \oplus \bigoplus_{j=k_0}^{s} \pi(G_j) \end{aligned}$$

Les deux termes de gauche sur les deux sommes directes sont de même dimension, donnant ainsi:

$$\bigoplus_{j=k_0}^{s} \pi(G_j) \quad = \quad \{0\}$$

Donc $\dim(\pi(G_{k_0})) = 0$, *i.e.* $\pi_{G_{k_0}} = P_{k_0}(u|_{G_{k_0}}) = 0$, *donc* $\mu_{u|_{G_{k_0}}} = Q_{k_0}|P_{k_0}$

⋆ *En reprenant le raisonnement symétrique, on montre que* $P_{k_0}|Q_{k_0}$, *et, les polynômes considérés étant unitaires, on a* $P_{k_0} = Q_{k_0}$, *ce qui contredit l'hypothèse de départ et conclut.*

■

Remarque. *La suite des invariants de similitude* $(P_1, \cdots, P_r)$ *caractérise complètement les classes de similitude sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *en d'autres termes, deux matrices de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *sont semblables si et seulement si elles ont la même suite d'invariants de similitude.*

Reférence. *X.Gourdon, Algèbre*