Intégrale de Dirichlet

Leçons 235,236,239,265

Théorème (Intégrale de Dirichlet)

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ est convergente et on peut même calculer sa valeur:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \quad = \quad \frac{\pi}{2}$$

On introduit la fonction auxiliaire suivante:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \end{array}$$

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer la convergence de l'intégrale.
2. Etudier F et montrer qu'elle vaut une certaine fonction usuelle que l'on précisera.
3. Etudier $\lim\limits_{+\infty} F$ et $\lim\limits_{0} F$ puis conclure.

Démonstration. *On rappelle que la fonction sinus cardinal est donnée par:*

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

1. Soit $T > 1$. On a:

$$\int_0^T \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \quad = \quad \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t}_{:=I_1} + \underbrace{\int_1^T \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t}_{:=I_2} \tag{1}$$

$sinc \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ donc l'intégrale I_1 converge.

De plus, une intégration par parties assure que:

$$\int_1^T \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \quad = \quad \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_{t=1}^{t=T} - \int_1^T \frac{\cos t}{t^2} \mathrm{d}t \tag{2}$$

Or, $t \longmapsto \frac{\cos t}{t^2} \in L^1([1; +\infty[)$, donc l'intégrale I_2 converge ($T \to +\infty$).

2. *$\forall t \in \mathbb{R}$; $|\sin t| \leq |t|$ donc $|sinc(t)| \leq 1$, d'où $sinc \in L^\infty(\mathbb{R})$. De plus, sinc est mesurable sur $[0;+\infty[$ (car régulière), et on peut constater que sur $\mathbb{R}_+^*$, F est la transformée de Laplace de sinc. Donc, en appliquant la propriété de dérivation de la transformée de Laplace, on a $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ et, pour tout $s > 0$:*

$$F'(s) = -\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{1+s^2}$$

Donc, pour $A > 1 > \varepsilon > 0$, on obtient par primitivation:

$$F(A) - F(\varepsilon) \quad = \quad \arctan(\varepsilon) - \arctan(A) \tag{3}$$

3. *On sait que $F(A) = \int_0^{+\infty} e^{-At} sinc(t)\mathrm{d}t$*

   Pour tout $A > 1$, $t \mapsto e^{-At} sinc(t)$ est mesurable (car régulière), et est dominée par $t \mapsto e^{-t}$, intégrable, positive et indépendante de A. Enfin, pour presque tout $t \geq 0$ (en fait pour tout $t > 0$), $e^{-At} sinc(t) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

   En vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons ainsi $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A) = 0$

   Les trois hypothèses nécessaires à son application étant bien vérifiées (mentionnées avent le résultat sur la limite). En passant à la limite $A \to +\infty$ dans 3, on obtient ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$-F(\varepsilon) \quad = \quad \arctan(\varepsilon) - \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

   Il reste à présent à montrer que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} F(\varepsilon) = F(0)$ (en effet, on a de la régularité $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, mais on ne sait à priori rien de la continuité en 0). On sait que $F(\varepsilon) - F(0) = \int_0^{+\infty} (e^{-\varepsilon t} - 1)\, sinc(t)\mathrm{d}t$

   On obtient ainsi:

$$\begin{aligned}
|F(\varepsilon) - F(0)| \quad &\leq \quad \left|\int_0^1 \left(e^{-\varepsilon t} - 1\right) sinc(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_1^{+\infty} \left(e^{-\varepsilon t} - 1\right) sinc(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \quad \int_0^1 \left|e^{-\varepsilon t} - 1\right|\mathrm{d}t + \left|\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{(i-\varepsilon)t} - e^{it}}{t}\mathrm{d}t}_{:=I_3}\right| \\
&\underset{IPP\ sur\ I_3}{\leq} \quad \int_0^1 \left|e^{-\varepsilon t} - 1\right|\mathrm{d}t + \left|\frac{e^{i-\varepsilon}}{i-\varepsilon} - \frac{e^i}{i}\right| + \left|\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\left(\frac{e^{(i-\varepsilon)t}}{i-\varepsilon} - \frac{e^{it}}{i}\right)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \quad \int_0^1 \left|e^{-\varepsilon t} - 1\right|\mathrm{d}t + \left|\frac{e^{(i-\varepsilon)t}}{i-\varepsilon} - \frac{e^{it}}{i}\right| + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\left|\frac{e^{(i-\varepsilon)t}}{i-\varepsilon} - \frac{e^{it}}{i}\right|\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En appliquant de nouveau le théorème de convergence dominée sur les deux intégrales, on obtient finalement:

$$|F(\varepsilon) - F(0)| \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$$

Ainsi, dans 4*, le passage à la limite* $\varepsilon \to 0$ *donne ainsi:*

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \quad = \quad \frac{\pi}{2}$$

■