Irréductibilité d'une fraction particulière

Leçons 120-122

Dans tout ce qui suit, n est un entier naturel non nul.

Théorème

1. La fraction $\frac{5^{n+1}+6^{n+1}}{5^n+6^n}$ est irréductible.
2. La fraction $\frac{7^{n+1}+3\cdot 10^{n+1}}{7^n+3\cdot 10^n}$ est irréductible.
3. **Généralisation:** Soient $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$, et soit F_n la fraction donnée par:

$$F_n = \frac{\lambda\alpha^{n+1}+\mu\beta^{n+1}}{\lambda\alpha^n+\mu\beta^n}$$

Alors F_n est irréductible si et seulement si $\lambda \wedge \mu = \lambda \wedge \beta = \alpha \wedge \mu = \alpha \wedge \beta = (\alpha-\beta) \wedge (\lambda+\mu) = 1$

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer les deux premiers points en raisonnant par l'absurde et en utilisant les propriétés élémentaires sur les congruences.
2. Montrer le troisième point en raisonnant par double implication: L'une est directe, l'autre fait intervenir un raisonnement par l'absurde et le corps $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$, où p est un nombre premier.

Démonstration. *1. Étudions les deux cas particuliers.*

- ⋆ *Supposons par l'absurde que* $\frac{5^{n+1}+6^{n+1}}{5^n+6^n}$ *est réductible. Alors il existe* p *premier tel que* $p|5^{n+1}+6^{n+1}$ *et* $p|5^n+6^n$*. Donc on a* $5^n \equiv -6^n \ [p]$*, soit* $6\cdot 5^n \equiv -6^{n+1} \ [p]$*, d'où* $6\cdot 5^n \equiv 5^{n+1} \ [p]$*. Ainsi,* $5^n(6-5) = 5^n \equiv 0 \ [p]$*.*

  Donc $p|5^n$*, soit* $p=5$*. Or,* $5^n+6^n \equiv 1 \ [5]$*, ce qui est absurde.*
- ⋆ *Supposons par l'absurde que* $\frac{7^{n+1}+3\cdot 10^{n+1}}{7^n+3\cdot 10^n}$ *est réductible. Alors il existe* p *premier tel que* $p|7^{n+1}+3\cdot 10^{n+1}$ *et* $p|7^n+3\cdot 10^n$*. Donc* $7^n \equiv -3\cdot 10^n \ [p]$*, soit* $7^{n+1} \equiv -21\cdot 10^n \ [p]$*, d'où* $21\cdot 10^n \equiv 3\cdot 10^{n+1} \ [p]$*.*

  Donc $p|10^n(30-21) = 9\cdot 10^n$ *soit* $p \in \{2,3,5\}$*. Or on a:*

$$\begin{aligned} 7^n+3\cdot 10^n &\equiv 1 \ [2] \\ 7^n+3\cdot 10^n &\equiv 1 \ [3] \\ 7^n+3\cdot 10^n &\equiv 2^n \ [5] \end{aligned}$$

  ce qui est absurde.

2. *Si F_n doit être irréductible, alors on doit avoir $\lambda \wedge \mu = \lambda \wedge \beta = \alpha \wedge \mu = \alpha \wedge \beta = 1$, et on supposera que c'est le cas.*

   ⋆ $\Leftarrow$ *On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que F_n ne soit pas irréductible. Alors il existe p premier tel que $p|\lambda\alpha^{n+1} + \mu\beta^{n+1}$ et $p|\lambda\alpha^n + \mu\beta^n$, et on a donc ces deux congruences:*

   $$\begin{cases} \lambda\alpha^n & \equiv & -\mu\beta^n & [p] \\ \lambda\alpha^{n+1} & \equiv & -\mu\beta^{n+1} & [p] \end{cases}$$

   Si $p|\alpha$, $p|\mu\beta^n$ donc, d'après le lemme d'Euclide, $p|\mu$ ou $p|\beta^n$, soit $p|\beta$, donc $\alpha \wedge \mu = p$ ou $\alpha \wedge \beta = p$, ce qui est absurde.

   On montre de même que p ne divise pas λ, μ et β. Ainsi, dans le corps $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$, $\overline{\lambda}, \overline{\mu}, \overline{\alpha}, \overline{\beta} \neq 0$.

   D'où $\overline{\lambda} = -\overline{\mu}\left(\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}\right)^n = -\overline{\mu}\left(\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}\right)^{n+1}$. Comme $\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}} \neq \overline{0}$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ et $\overline{\mu} \neq \overline{0}$, toujours dans $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$, on a donc, par simplification, $\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}} = \overline{1}$ (tout élément non nul est inversible dans un corps).

   Donc $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$, soit $\alpha \equiv \beta$ $[p]$ et $\lambda \equiv -\mu$ $[p]$, donc $p|\alpha - \beta$ et $p|\lambda + \mu$, d'où $(\alpha - \beta) \wedge (\lambda + \mu) = p$.

   ⋆ $\Rightarrow$ *Réciproquement, supposons que $(\alpha - \beta) \wedge (\lambda + \mu) \neq 1$. Alors il existe p premier tel que $p|\alpha - \beta$ et $p|\lambda + \mu$, donc, dans le corps $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$, $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$ et $\overline{\lambda} = -\overline{\mu}$, soit $\overline{\lambda}\overline{\alpha}^n = -\overline{\mu}\overline{\beta}^n$ et $\overline{\alpha}^{n+1} = -\overline{\mu}\overline{\beta}^{n+1}$. Ainsi, $p|\lambda\alpha^n + \mu\beta^n$ et $p|\lambda\alpha^{n+1} + \mu\beta^{n+1}$, et F_n n'est pas irréductible.*

■