Convergence d'une suite de polygones vers l'isobarycentre

Leçons 153,155,181,191

Dans tout ce qui suit, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Théorème (Convergence vers l'isobarycentre)

Soit $U^{[0]} = [z_1^{[0]}, z_2^{[0]} \cdots, z_n^{[0]}]^T \in \mathbb{C}^n$ et soit $(U^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$ par:

$$U^{[k+1]} = \frac{1}{2}\left[z_1^{[k]} + z_2^{[k]}, z_2^{[k]} + z_3^{[k]}, \cdots, z_n^{[k]} + z_1^{[k]}\right]^T \tag{1}$$

$$\text{Si } g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^{[k]} \quad \text{alors } U^{[k]} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} [g, g, \cdots, g]^T$$

Géométriquement, cela correspond à la convergence de la suite de polygones d'affixes $U^{[k]}$ vers l'isobarycentre du premier polygone d'affixe $U^{[0]}$.

Voici le plan de la démonstration:

1. Ecrire $U^{[k]} = A^k U^{[0]}$.
2. Diagonaliser A.
3. Déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} U^{[k]}$.

Démonstration. *1. La relation* (1) *assure que, pour tout* $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{bmatrix} z_1^{[k+1]} \\ \vdots \\ z_n^{[k+1]} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix}}_{:=A} \cdot \begin{bmatrix} z_1^{[k]} \\ \vdots \\ z_n^{[k]} \end{bmatrix}$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $U^{[k+1]} = A^k U^{[0]}$.

2. Soit χ_A *le polynôme caractéristique de* A:

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & X-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & & & X-\frac{1}{2} \end{vmatrix}_{[n]}$$

On développe par rapport à la première colonne:

$$\chi_A = \left(X - \frac{1}{2}\right) \begin{vmatrix} X-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -\frac{1}{2} \\ (0) & & & X-\frac{1}{2} \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & & & (0) \\ X-\frac{1}{2} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & X-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

Donc on a: $\chi_A = \left(X - \frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *et on peut facilement trouver ses racines:*

$$\begin{aligned} \left(X - \frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 &\Leftrightarrow X - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} e^{\frac{2\rho i\pi}{n}}, \ \rho \in [\![0, n-1]\!] \\ &\Leftrightarrow X = t_\rho = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{2\rho i\pi}{n}} - 1\right], \ \rho \in [\![0, n-1]\!] \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc $\left\{t_\rho = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{2\rho i\pi}{n}} - 1\right], \ \rho \in [\![0, n-1]\!]\right\}$*, toutes distinctes. Donc A est diagonalisable, i.e. il existe* $P \in GL_n(\mathbb{C})$ *telle que:*

$$A = P^{-1} \begin{bmatrix} t_0 & & (0) \\ & \ddots & \\ & & t_{n-1} \end{bmatrix} P$$

3. *On a donc, pour tout* $k \in \mathbb{N}$*:*

$$A^k = P^{-1} \begin{bmatrix} t_0^k & & (0) \\ & \ddots & \\ & & t_{n-1}^k \end{bmatrix} P$$

Soit $\rho \in [\![1, n-1]\!]$*:*

$$\begin{aligned} |t_\rho|^2 &= \frac{1}{4}\left[\left(1 + \cos\left(\frac{2\rho\pi}{n}\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{2\rho\pi}{n}\right)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[2 + 2\cos\left(\frac{2\rho\pi}{n}\right) + \cos^2\left(\frac{2\rho\pi}{n}\right) + \sin^2\left(\frac{2\rho\pi}{n}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \underbrace{\cos\left(\frac{2\rho\pi}{n}\right)}_{<1 \ car\ \rho>0}\right] \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\rho \in [\![1, n-1]\!]$, $t_\rho^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *et* $t_0 = 1$*:*

$$D\text{'où:} \quad A^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & & (0) \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{bmatrix} P := A^\infty$$

La suite $(U^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ *est donc convergente, de limite* $U^{[\infty]}$ *vérifiant* $U^{[\infty]} = AU^{[\infty]}$ *(continuité de* $X \mapsto AX$*), donc* $U^{[\infty]}$ *appartient au sous espace propre de* A *associé à la valeur propre* 1*. On remarque que* $[1, \cdots, 1]^T$ *est vecteur propre de* A *pour la valeur propre* 1*, et le sous espace propre associé à la valeur propre* 1 *est de dimension 1, donc il existe* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que:*

$$U^{[\infty]} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$\textit{On remarque également que, pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^{[k]}$$

Donc, par passage à la limite lorsque $k \to +\infty$*, on obtient ainsi:*

$$g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^{[\infty]} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda = \lambda \quad d\text{'où} \quad U^{[\infty]} = \begin{bmatrix} g \\ \vdots \\ g \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

■

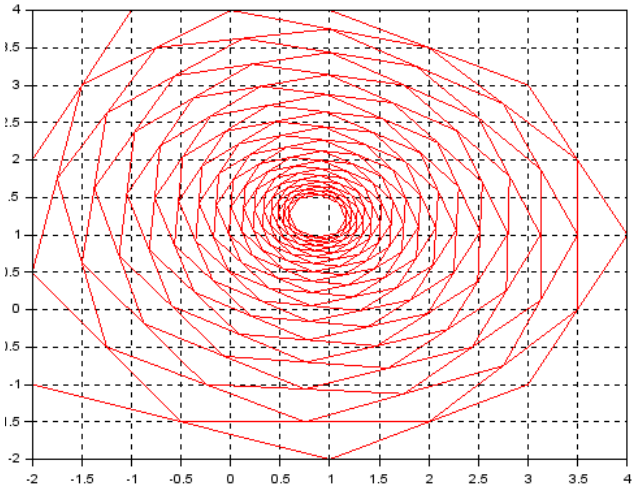

Figure 1: Simulation avec Scilab pour $n = 8$ points jusqu'à $k = 30$ itérations de la suite $(U^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$.