# Réduction de Jordan pour les endomorphismes nilpotents

**Leçons 154,157**

Dans tout ce qui suit, $E$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie $n$.

**Théorème (Réduction de Jordan pour les endomorphismes nilpotents)**

Soit $u$ un endomorphisme nilpotent de $E$. Alors ils existent $d_1 \geqslant \cdots \geqslant d_p \in \mathbb{N}^*$ et une base $\mathcal{B}$ de $E$ tels que:

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} J_{d_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_{d_p} \end{bmatrix} \text{ où } J_{d_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{C})$$

avec $d_1 + \cdots + d_p = n$.

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer un lemme d'existence de sous-espace supplémentaire à la suite des noyaux itérés.
2. Construire une base à partir des sous-espaces en question.

On fait une démonstration à partir de la suite des noyaux itérés $(\ker(u^k))_{k\in\mathbb{N}}$ qui est strictement croissante et stationnaire à partir d'un certain rang $r$, appelé indice de nilpotence $u^r = 0$.

**Lemme**

Ils existent des sous-espaces $F_r, \cdots, F_1$ tels que:

1. Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $F_k$ est un supplémentaire de $\ker(u^{k-1})$ dans $\ker(u^k)$, i.e. on a la somme directe: $\ker(u^k) = \ker(u^{k-1}) \oplus F_k$
2. Pour tout $k \in [\![2, r]\!]$, $u(F_k) \subset F_{k-1}$

**Démonstration.** *On construit les $F_r, \cdots, F_{r-k}$ par récurrence sur $k$.*

⋆ ***Initialisation:*** *On construit $F_r$ comme un supplémentaire dans* $\ker(u^{r-1})$. $E = \ker(u^{r-1}) \oplus R_r$.

⋆ ***Hérédité:*** *Soit $k < r$ et supposons les sous-espaces $F_r, \cdots, F_{r-k}$ construits. On a alors l'inclusion:*

$$\ker(u^{r-k-2}) \oplus u(F_{r-k}) \quad \subset \quad \ker(u^{r-k-1}) \tag{1}$$

*En effet, si $y \in u\left(\ker(u^s)\right)$, alors il existe $x \in \ker(u^s)$ tel que $y = u(x)$ et ainsi $u^{s-1}(y) = u^s(x) = 0$. Donc $y \in \ker(u^{s-1})$, d'où $u\left(\ker(u^s)\right) \subset \ker(u^{s-1})$.*

*Soit $y \in u(F_{r-k}) \cap \ker(u^{r-k-2})$. Alors il existe $x \in F_{r-k}$ tel que $y = u(x)$ et $u^{r-k-2}(y) = 0$. Donc $u^{r-k-1}(x) = 0$, i.e. $x \in \ker(u^{r-k-1})$, donc $x \in F_{r-k} \cap \ker(u^{r-k-1}) = \{0\}$ par hypothèse de récurrence. Donc $y = u(x) = 0$, donc $\ker(u^{r-k-2})$ et $u(F_{r-k})$ sont en somme directe.*

*De plus, $F_{r-k} \subset \ker(u^{r-k})$ donc $u(F_{r-k}) \subset u(\ker(u^{r-k})) \subset \ker(u^{r-k-1})$ et $\ker(u^{r-k-2}) \subset \ker(u^{r-k-1})$.*

*Ainsi, par l'inclusion (1), on complète $u(F_{r-k})$ et $F_{r-k-1}$ tel que:*

$$\ker(u^{r-k-1}) \quad = \quad \ker(u^{r-k-2}) \oplus F_{r-k-1}$$

■

On peut passer à la démonstration du théorème à proprement parler:

**Démonstration.** *On construit récursivement la base $\mathcal{B}$ à l'aide des sous-espaces $F_r, \cdots, F_1$ associés à $u$ par le lemme précédent.*

- *On construit une base de $F_r$: $(e_{j,r})_{j \in [\![1, m_r]\!]}$, où $m_r = \dim(F_r)$.*
- *On pose, pour tout $j \in [\![1, m_r]\!]$, $e_{j,r-1} = u(e_{j,r})$. Montrons que $(e_{j,r-1})_{j \in [\![1,m_r]\!]}$ est une famille libre de $F_{r-1}$. Pour tout $k \geqslant 2$, $\ker(u|_{F_k}) = F_k \cap \ker(u) = \{0\}$ par hypothèse, puisque l'on a:*

$$E = \underbrace{\underbrace{\ker(u) \oplus F_2}_{=\ker(u^2)} \oplus \cdots \oplus F_{r-1}}_{=\ker(u^{r-1})} \oplus F_r = \ker(u^r)$$

  *Donc $u|_{F_k}$ est injective et envoie toute famille libre sur une famille libre. On complète cette famille libre en une base $(e_{j,r-1})_{j \in [\![1, m_r + m_{r-1}]\!]}$.*
- *De même, une fois construite une base $(e_{j,k})_{j \in [\![1, m_r + \cdots + m_k]\!]}$ de $F_k$, on considère son image par $u$ (libre) que l'on complète en une base de $F_{k-1}$.*

*On obtient ainsi au bout de $r$ étapes une base $\mathcal{B} = (e_{j,k})_{j,k}$ de $E$, en prenant ses éléments dans l'ordre lexicographique, i.e.*

$$\mathcal{B} = \{e_{1,1} \cdots, e_{1,r}, \cdots, e_{m_r,1}, \cdots, e_{m_r,r}, e_{m_r+1,1}, \cdots, e_{m_r+1,r-1}, \cdots$$

$$, e_{m_r+m_{r-1},1}, \cdots, e_{m_r+m_{r-1},r-1}, \cdots, e_{m_r+\cdots+m_2+1,1}, \cdots, e_{m_r+\cdots+m_2+1,m_1}\}$$

*où $(e_{j,k})_{j \in [\![1, m_r+\cdots+m_k]\!]}$ est une base de $F_k$, où $k \in [\![1, r]\!]$.*

*Or, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $e_{j,k-1} = u(e_{j,k})$, donc on a:*

$$\mathcal{B} = \left\{u^{r-1}(e_{1,r}), \cdots, u(e_{1,r}), e_{1,r}, \cdots, u^{r-1}(e_{m_r,r}), \cdots, u(e_{m_r,r}), e_{m_r,r}, \cdots\right.$$

$$, u^{r-2}(e_{m_r+1,r-1}), \cdots, u(e_{m_r+1,r-1}), e_{m_r+1,r-1}, \cdots$$

$$, u^{r-2}(e_{m_r+m_{r-1},r-1}), \cdots, u(e_{m_r+m_{r-1},r-1}), e_{m_r+m_{r-1},r-1}, \cdots$$

$$\left., e_{m_r+\cdots+m_2+1,1}, \cdots, e_{m_r+\cdots+m_2+m_1,1}\right\}$$

$$\text{Ainsi, on a:} \quad Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} J_r & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & J_r & & & & (0) & & \\ & & & J_{r-1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & J_{r-1} & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & (0) & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

*avec, par convention, $J_1 = [0]$.*

■

**Remarques.** 1. *Cette forme est appelée réduite de Jordan, où forme normale de Jordan.*

2. *Il y a $m_i$ blocs de Jordan de taille $i$, et il y a $\dim(F_i) = \dim(\ker(u)) - \dim(\ker(u^{i-1}))$ blocs de Jordan de taille au moins $i$ (plus facile à calculer).*

3. *On peut généraliser la forme de Jordan à tout endomorphisme $u$ de $E$, trigonalisable, grâce à la décomposition en somme directe:*

$$E \quad = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} \ker\left[(u - \lambda Id_E)^{m_\lambda}\right]$$

*où $m_\lambda$ est la multiplicité de $\lambda$ dans le polynôme minimal de $u$. C'est une décomposition en somme directe de sous-espaces caractéristiques.*

*Puis raisonner sur chaque sous-espace propre $\ker(u - \lambda Id_E)$ avec l'endomorphisme $u - \lambda Id_E$, nilpotent sur ce sous-espace. La matrice de $u$ dans une bonne base $\mathcal{B}$ (obtenue par concaténation des bases des sous-espaces propres) est donc:*

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{r_1} + N_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 I_{r_2} + N_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_q I_{r_q} + N_q \end{bmatrix}$$

*où les matrices $N_1, \cdots, N_q$ sont des réduites de Jordan. Cette forme caractérise les classes de similitude pour l'action de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par similitude.*

**Reférence.** *R.Mansuy - R.Mneimné, Algèbre linéaire, réduction des endomorphismes*