Le laplacien discret 1D

Leçons 144,155,222,226,233

Théorème (Matrice de discrétisation du laplacien en une dimension)

Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$. Soit la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par:

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

On a alors:

1. $A_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (matrice symétrique définie positive)
2. Le spectre de A est donné par:
$$\sigma(A_n) = \left\{2 - 2\cos\left(\frac{p\pi}{n+1}\right), p \in [\![1,n]\!]\right\} \tag{1}$$
3. Le conditionnement de A_n explose avec n:
$$Cond_n(A_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4n^2}{\pi^2} \tag{2}$$

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer que $A_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ en revenant à la définition (pour les leçons 144,155)
2. Trouver les valeurs et vecteurs propres à l'aide d'une suite récurrente d'ordre 2
3. Étudier le conditionnement avec les valeurs propres (pour les leçons 222,226,233)

Démonstration. *1. Soit $X \in \mathbb{R}$. On a alors:*

$$\begin{aligned}
X^T A_n X &= \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \vdots \\ -x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n \\ -x_{n-1} + 2x_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= (2x_1^2 - x_2 x_1) + (-x_1 x_2 + 2x_2^2 - x_2 x_3) + \dots \\
&= +(-x_{n-2}x_{n-1} + 2x_{n-1}^2 - x_n x_{n-1}) + (-x_{n-1}x_n + 2x_n^2) \\
&\overset{\text{Réarrangement}}{=} x_1^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + \dots + (x_{n-1}^2 - 2x_{n-1}x_n + x_n^2) + x_n^2 \\
&= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 + x_n^2
\end{aligned}$$

Donc $X^T A_n X \geqslant 0$, donc $A_n \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. De plus, l'égalité $X^T A_n X = 0$ implique alors que $x_1 = x_2 - x_1 = \dots x_{n-1} - x_n = x_n = 0$, d'où $x_1 = \dots = x_n = 0$, i.e. $X = 0$. Ainsi, $A_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. En vertu du théorème spectral, A_n est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles strictement positives.

2. Soit $\lambda \in \sigma(A_n)$. Il existe un vecteur propre $X \neq 0$ tel que $A_X = \lambda X$. On étend $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ en une suite $x_0, \dots, x_{n+1}$ telle que $x_0 = x_{n+1} = 0$. L'équation $AX = \lambda X$ devient ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$-x_k + 2x_{k+1} - x_{k+2} = \lambda x_{k+1} \quad i.e \quad x_{k+2} + (\lambda - 2)x_{k+1} + x_k$$

C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, de polynôme caractéristique $X^2 + (\lambda - 2)X + 1$. Soit $\Delta = (\lambda - 2)^2 - 4$ le discriminant de ce polynôme:

- Si $\Delta > 0$, alors les racines (réelles) du polynôme caractéristique sont:

$$x_\pm = \frac{2 - \lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2} \neq 0$$

On obtient ainsi $x_k = \alpha_+ x_+^k + \alpha_- x_-^k$ pour $\alpha_+, \alpha_- \in \mathbb{C}$. D'une part, on a: $x_0 = \alpha_+ + \alpha_- = 0$. D'autre part, on a: $x_{n+1} = \alpha_+ x_+^{n+1} + \alpha_- x_-^{n+1} = 0$. Les racines étant distinctes, on a alors $|x_+| \neq |x_-|$, donnant ainsi $x_+^{n+1} \neq x_-^{n+1}$, ainsi que ce système linéaire de rang 2:

$$\begin{cases} \alpha_+ + \alpha_- = 0 \\ x_+^{n+1}\alpha_+ + x_-^{n+1}\alpha_- = 0 \end{cases}$$

On obtient bien $\alpha_+ = \alpha_- = 0$*, et donc la suite* $(x_k)_k$ *est nulle, soit* $X = 0$*, ce qui est absurde.*

- *Si* $\Delta = 0$*, alors la racine double du polynôme caractéristique est donnée par:*

$$x_{\parallel} \quad = \quad \frac{2-\lambda}{2} \neq 0$$

Donc on a: $x_k = (\alpha_+ k + \alpha_-)x_{\parallel}^k$ *pour* $\alpha_+, \alpha_- \in \mathbb{C}$*. D'abord, on a* $x_0 = \alpha_- = 0$*, ensuite, on a* $x_{n+1} = (n+1)x_{\parallel}^{n+1} = 0$*, donc la suite* $(x_k)_k$ *est encore nulle, et* $X = 0$*, ce qui est là aussi absurde.*

- *Il reste le cas* $\Delta < 0$*. Les deux racines (complexes conjuguées) du polynôme caractéristique sont:*

$$x_{\pm} \quad = \quad \frac{2-\lambda \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

Remarquons d'abord que:

$$\begin{aligned} |x_{\pm}|^2 &= \frac{(2-\lambda)^2}{4} + \frac{|\Delta|}{4} \\ &= \frac{1}{4}(2-\lambda)^2 + \frac{1}{4}(-\Delta) \\ &= \frac{1}{4}(2-\lambda)^2 + \frac{1}{4}\left[4-(\lambda-2)^2\right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, l'expression de x_k *est donnée par* $x_k = \alpha_+ e^{ki\theta} + \alpha_- e^{-ki\theta}$ *pour* $\theta \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$*.*

Or, on sait que $x_0 = \alpha_+ + \alpha_- = 0$*, donc* $\alpha_- = -\alpha_+$*, soit* $x_k = 2i\alpha_+ \sin(k\theta)$*.*

De plus, on sait que $x_{n+1} = 0$*, donc on a* $\alpha_+ = 0$ *où* $\sin((n+1)\theta) = 0$*. Si* $\alpha_+ = 0$*, alors la suite* $(x_k)_k$ *est nulle, et* $X = 0$*, ce qui est impossible, donc il reste l'option* $\sin((n+1)\theta) = 0$*. Cela donne* $\theta = \frac{p\pi}{n+1}$ *pour* $p \in \mathbb{Z}$*. Pour que* $(x_k)_k$ *ne soit pas nulle, on doit imposer* $p \notin (n+1)\mathbb{Z}$*.*

Ainsi, comme on a $x_+ = e^{i\frac{p\pi}{n+1}}$*, il vient, en extrayant la partie réelle, que* $\frac{2-\lambda}{2} = \cos\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)$*, d'où:*

$$\lambda = \lambda_p \quad = \quad 2 - 2\cos\left(\frac{p\pi}{n+1}\right) \tag{3}$$

puisque $p \notin (n+1)\mathbb{Z}$*, on peut donc choisir* $p \in [\![1, n]\!]$*, ce qui montre la propriété* (1)

- *On admet la proposition suivante:*

Proposition (Conditionnement)

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Le conditionnement de M relatif à la norme eulidienne $\|\cdot\|_2$ est donné par

$$Cond_2(M) \quad = \quad \sqrt{\frac{\underset{\lambda\in\sigma(M^TM)}{Max}|\lambda|}{\underset{\lambda\in\sigma(M^TM)}{Min}|\lambda|}}$$

Dans notre cas, vu que A_n est symétrique, on a:

$$\begin{aligned} Cond_2(A_n) &= \frac{\underset{\lambda\in\sigma(A_n)}{Max}|\lambda|}{\underset{\lambda\in\sigma(A_n)}{Min}|\lambda|} \\ &= \frac{2-2\cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)}{2-2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)} \end{aligned}$$

- Au numérateur, on a:

$$2-2\cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2-2\cos(\pi)=4$$

- Au dénominateur, on a:

$$\begin{aligned} 2-2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) &= 2\left[-\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right] \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} 2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)^2 \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{n^2} \end{aligned}$$

Finalement, on a:

$$Cond_2(A_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4n^2}{\pi^2} \qquad (2)$$

■

Remarques. 1. *L'établissement du résultat (3) est en fait "incomplet". En effet, il s'agit d'un raisonnement par analyse-synthèse qui est caché dessous, mais seule l'analyse a été menée, la synthèse consistant à montrer que $\left(\cos\left(\frac{pk\pi}{n+1}\right)\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$ pour $p\in[\![1,n]\!]$ est bien vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_p = 2-2\cos\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)$, ce qui repose sur des calculs trigonométriques, et est donc peu intéressant.*

2. *Le résultat (1) est utilisé dans la résolution numérique de problèmes d'évolution en une dimension d'espace x comprenant un terme de dérivée seconde d'espace $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, comme par exemple l'équation de la chaleur ou de Schrödinger, et permet de donner*

une condition de stabilité du schéma numérique utilisé (condition CFL, impliquant des conditions sur le pas de temps et d'espace). En réalité, l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ *se discrétise en la matrice:*

$$A'_n = (n-1)^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

lorsque l'on utilise des différences finies sur $[0,1]$*, avec un pas de discrétisation de* $\frac{1}{n-1}$*, pour* n *noeuds de discrétisation équirépartis sur le segment* $[0,1]$.

3. *Le résultat* (3) *signifie que lorsque* n *augmente, la matrice* A_n *(et* A'_n *définie avant) est de moins en moins bien conditionnée, ce qui signifie que lorsque l'on résout le système linéaire* $A'_n X = B$*, le risque d'erreur est considérable, ce qui pose problème, impose donc d'autres solutions pour résoudre le système linéaire, comme certains algorithmes spécifiques aux matrices tridiagonales.*