Décombrement des matrices diagonalisables sur un corps fini

Leçons 101,103,106,150,190

Définition (matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$)

Soient p un nombre premier et $q = p^r$ où $r \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments. On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$

Théorème (Dénombrement de $\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)$)

Avec la convention $|GL_0(\mathbb{F}_q)| = 1$, on a:

$$|\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_q \in \mathbb{N} \\ m_1+\ldots+m_q=n}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=0}^{q} |GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

Voici le plan de la démonstration:

1. Déterminer les orbites de l'action de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)$ par conjugaison.
2. Étudier le cardinal des ces orbites en étudiant le stabilisateur via les sous-espaces propres

Démonstration. *1. $GL_n(\mathbb{F}_q)$ agit sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)$ par conjugaison. On va décrire les orbites. Soit $M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)$:*

$$\mathcal{O}_M = \left\{PMP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{F}_q)\right\}$$

M est diagonalisable, donc il existe $m = (m_1, \ldots, m_q) \in \mathbb{N}^q$ tel que $D_m \in \mathcal{O}_m$ avec:

$$D_m = \begin{bmatrix} \alpha_1 I_{m_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_q I_{m_q} \end{bmatrix}$$

en notant $\mathbb{F}_q = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\}$. De plus, si on a $D_{m'} \in \mathcal{O}_{D_{m'}}$, alors:

$$\chi_{D_{m'}} = \prod_{i=1}^{q}(X-\alpha_i)^{m'} = \prod_{i=1}^{q}(X-\alpha_i)^{m} = \chi_{D_m}$$

donc $m = m'$. Les orbites sont donc disjointes, i.e. :

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q) = \bigsqcup_{\substack{(m_1,\ldots,m_q)\in\mathbb{N}^q \\ m_1+\ldots+m_q=n}} \mathcal{O}_{D_m}$$

2. *On doit trouver le cardinal de chaque orbite $\mathcal{O}_{D_m}$, et on utilise pour cela la relation orbite-stabilisateur:*

$$|\mathcal{O}_{D_m}| = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|Stab_{D_m}|}$$

Etudions les stabilisateurs: Soit $P \in Stab_{D_m}$. Alors $PD_mP^{-1} = D_m$ soit $PD_m = D_mP$. Soit $\lambda \in \sigma(D_m)$ (spectre) et $X \in SEP(D_m, \lambda)$ (sous-espace propre). Alors $D_mPX = PD_mX = P \cdot \lambda X = \lambda PX$, donc $PX \in SEP(D_m, \lambda)$. Or, on a également la décomposition suivante:

$$\mathbb{F}_q^n = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(D_m)} SEP(D_m, \lambda)$$

De plus, P stabilise chaque sous-espace propre, donc P est de cette forme:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & P_q \end{bmatrix}$$

où, pour tout $i \in [\![1, q]\!], P_i \in GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)$

Réciproquement, si P est de la forme 1, alors on a bien $PD_m = D_mP$, d'où:

$$Stab_{D_m} = \left\{ \begin{bmatrix} P_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & P_q \end{bmatrix}, \forall i \in [\![1, q]\!], P_i \in GL_{m_i}(\mathbb{F}_q) \right\}$$

Ainsi, en étudiant le cardinal, il vient:

$$|Stab_{D_m}| = \prod_{i=1}^{q} |GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)|$$

Finalement, on a bien:

$$|\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\substack{m_1,\dots,m_q \in \mathbb{N} \\ m_1+\dots+m_q=n}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=0}^{q} |GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

■

Remarque. *On a, pour $k \in \mathbb{N}^*$: $|GL_k(\mathbb{F}_q)| = (q^k - 1)(q^k - q)\dots(q^k - q^{k-1})$. En effet, il suffit pour cela de compter le nombre de bases du $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel $\mathbb{F}_q^k$:*

- *Pour choisir le premier vecteur, il suffit qu'il soit non nul, ce qui donne $q^k - 1$ solutions.*
- *Pour choisir le second vecteur, il suffit qu'il ne soit pas dans la droite vectorielle engendrée par le premier vecteur, donnant ainsi $q^k - q^2$ solutions.*
- $\dots$
- *Pour choisir le j-ième vecteur, il suffit qu'il ne soit pas dans le sous-espace vectoriel engendré par les $j-1$ premiers vecteurs, donnant ainsi $q^k - q^{j-1}$ solutions.*

Finalement, on multiplie le nombre de solutions pour les k vecteurs, donnant $|GL_k(\mathbb{F}_q)| = (q^k - 1)(q^k - q)\dots(q^k - q^{k-1})$