Théorèmes du point fixe et de Cauchy-Lipschitz globalement lipschitzien

Leçons 205,220

Théorème (Théorème du point fixe de Banach-Picard)

Soit (E,d) un espace métrique complet. Soit $f : E \longrightarrow E$ une application strictement contractante, i.e. il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que, pour tous $x,y \in E$, $d(f(x),f(y)) \leqslant \alpha d(x,y)$. Alors:

1. f admet un unique point fixe, i.e. il existe un unique $x^* \in E$ tel que $f(x^*) = x^*$
2. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par:

$$\begin{cases} x_0 \in E \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

converge vers x^* de manière géométrique:

$$d(x_n, x^*) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer l'existence de ce point fixe en montrant que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge, et que sa limite est un point fixe de f
2. Montrer l'unicité utilisant le fait que f est contractante afin de montrer que deux points fixes de f sont identiques.
3. Montrer la vitesse de convergence en utilisant le premier point.

oo

Démonstration. *1. Soient $n > m \in \mathbb{N}$. L'inégalité triangulaire et le caractère contractant de f assurent que:*

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= f(f^n(x_0), f^m(x_0)) \\ d(x_n, x_m) &\leqslant \sum_{k=m}^{n-1} d(f^{k+1}(x_0), f^k(x_0)) \\ d(x_n, x_m) &\leqslant \sum_{k=m}^{n} \alpha^k d(x_1, x_0) \end{aligned} \tag{1}$$

Comme $\alpha \in]0,1[$, on a:

$$d(x_n, x_m) \underset{m,n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme E est complet, elle converge vers une limite x^*. f est $\alpha-$lipschitzienne (car contractante) donc est continue, et on a d'une part:

$$x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^*$$

et d'autre part:

$$x_{n+1} = f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x^*)$$

Par unicité de la limite, on a $x^* = f(x^*)$, donnant l'existence.

2. *On montre l'unicité: Soient x^* et y^* deux points fixes de f. On a:*

$$\begin{aligned} d(x^*, y^*) &= d(f(x^*), f(y^*)) \\ &\leqslant \alpha d(x^*, y^*) \end{aligned}$$

D'où $(1-\alpha)d(x^*, y^*) \leqslant 0$

Or $1-\alpha > 0$ donc $d(x^*, y^*) \leqslant 0$, soit $d(x^*, y^*) = 0$ par positivité de la distance. Par séparation de la distance, on a $x^* = y^*$, ce qui montre l'unicité.

3. *Montrons la vitesse de convergence: Dans l'inégalité 1, lorsque $n \to +\infty$, on obtient, pour $m \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned} d(x^*, x_m) &\leqslant d(x_1, x_0) \sum_{k=m}^{\infty} \alpha^k \\ d(x^*, x_m) &\leqslant d(x_1, x_0)\alpha^m \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \end{aligned}$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_n, x^*) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

■

Théorème (Théorème de Cauchy-Lipschitz - cas particulier)

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $d \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application **globalement lipschitzienne** en sa seconde variable, i.e. il existe $L > 0$ tel que pour tous $t \in I, x, y \in \mathbb{R}^d$, $||f(t,x) - f(t,y)|| \leqslant L||x-y||$, où $||\cdot||$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^d$. Alors le problème de Cauchy:

$$[E] \quad \left\{ \begin{array}{rcll} y'(t) & = & f(t, y(t)) & \\ y(t_0) & = & y_0 & t_0 \in I \end{array} \right.$$

admet une unique solution continue sur un intervalle $[t_0 - T, t_0 + T]$, où $T > 0$.

Démonstration. *L'idée principale de la démonstration repose sur le théorème du point fixe. On ramène $[E]$ à une équation intégrale:*

$$y(t) \;=\; y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\mathrm{d}s$$

Soit $T > 0$. L'espace vectoriel normé $E_0 := \mathcal{C}^0([t_0 - T, t_0 + T], \mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach (complet) pour la norme:

$$||u||_{L^\infty} \;=\; \sup_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} ||u(t)||$$

Soit l'application: $\Phi : E_0 \longrightarrow E_0$ donnée, pour tout $z \in E_0$, par:

$$\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T] \quad , \quad \Phi(z)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))\mathrm{d}s$$

On doit choisir T afin de rendre Φ strictement contractante. Soient $z_1, z_2 \in E_0$ et $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. On a alors:

$$\begin{array}{rcl} ||\Phi(z_1)(t) - \Phi(z_2)(t)|| & = & \left|\left| y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, z_1(s))\mathrm{d}s - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, z_2(s))\mathrm{d}s \right|\right| \\ & = & \left|\left| \displaystyle\int_{t_0}^{t} \left[f(s, z_1(s)) - f(s, z_2(s)) \right] \mathrm{d}s \right|\right| \\ & \leqslant & \displaystyle\int_{t_0}^{t} ||f(s, z_1(s)) - f(s, z_2(s))|| \, \mathrm{d}s \\ & \leqslant & L \displaystyle\int_{t_0}^{t} ||z_1(s) - z_2(s)||\mathrm{d}s \\ & \leqslant & 2TL||z_1 - z_2||_{L^\infty} \end{array}$$

Ainsi, on a:

$$||\Phi(z_1) - \Phi(z_2)|| \;\leqslant\; 2TL||z_1 - z_2||_{L^\infty}$$

Si l'on choisit T de telle sorte que $T < \frac{1}{2L}$, alors Φ est strictement contractante, ce qui correspond à l'existence et l'unicité d'un point fixe de Φ, i.e. une unique solution à $[E]$.

■

Remarques. *1. On montre que E_0 est un espace de Banach en y considérant une suite de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, assurant ainsi que pour tout $x \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^d$ puis, en utilisant la complétude de $\mathbb{R}^d$ pour $||\cdot||$, cette suite converge. On obtient ensuite la convergence uniforme de la suite, et la convergence uniforme préserve la continuité à la limite*

2. La démonstration du théorème du point fixe de Banach-Picard fournit une méthode "récursive" pour approcher la solution de l'équation différentielle, en appliquant à une fonction initiale continue (même constante) la fonction Φ. Toutefois, on préfèrera une méthode d'Euler afin d'obtenir une approximation numérique de la solution.

3. Le théorème de Cauchy-Lipschitz se généralise aux fonctions localement lipschitziennes en leur seconde variable (i.e. lipschitziennes en leur seconde variable sur un ouvert, comme par exemple les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$). La démonstration y est alors plus longue et plus technique, et repose sur la notion de cylindre de sécurité.