Polynômes de Bernstein

Leçons 209,241,261,262,264,266

Définition (n-ième polynôme de Bernstein)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On définit le n-ième polynôme de Berstein de f par:

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Définition (module de continuité)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On définit son module de continuité par:

$$\begin{array}{rccc} \omega : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & h & \longmapsto & Sup\{|f(u)-f(v)| : |u-v| \leq h\} \end{array}$$

Remarque. *Le module de continuité est croissant, ce qui veut dire que, si $\lambda, h \geq 0$, alors on a:*

$$\omega(\lambda h) \leq \omega\left(\left(\lfloor \lambda \rfloor + 1\right) h\right) \leq \left(\lfloor \lambda \rfloor + 1\right) \omega(h) \leq (\lambda + 1)\, \omega(h)$$

Théorème (Théorème de Weierstrass avec les polynômes de Bernstein)

En identifiant $B_n(f)$ avec la fonction $x \mapsto B_n(f)(x)$ sur $[0,1]$, on a:

1. $$\|f - B_n(f)\|_{L^\infty} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. Plus précisément, on a:

$$\|f - B_n(f)\|_{L^\infty} \leq \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer la loi faible des grands nombres
2. Montrer le premier point du théorème à l'aide de l'évènement $\left\{\left|x - \frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right\}$, où $x \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$ et S_n est précisée dans la loi faible des grands nombres.
3. En utilisant les propriétés du module de continuité, montrer le deuxième point du théorème

Lemme (Loi faible des grands nombres)

Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires i.i.d. ademettant des un moment d'ordre 1 et 2. On a alors, en posant $S_n = X_1 + \ldots + X_n$:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X]$$

Démonstration. *Soit $\varepsilon > 0$. Comme les (X_i) sont i.i.d., on a:*

$$Var(S_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = nVar(X_1)$$

.

De plus, la linéarité de l'espérence assure que $\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \mathbb{E}[X_1]$, donc on obtient via l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{Var\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{Var\left(S_n\right)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{Var(X_1)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ceci correspond bien, par définition, à une convergence en probabilités.

■

Maintenant, passons à la démonstration du théorème à proprement parler:

Démonstration. *1. Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont i.i.d. de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(x)$ où $x \in [0,1]$, alors on a $\mathbb{E}\left[X_1\right] = x$ et, pour $\varepsilon > 0$:*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{x(1-x)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \tag{1}$$

2. Soit $x \in [0,1]$. On a, par indépendance des variables aléatoires X_i, $S_n \sim \mathcal{B}(n,x)$ (Loi binomiale). Le théorème de transfert assure que:

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

D'où: $\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(x)$

On a donc:

$$|f(x) - B_n(f)(x)| = \mathbb{E}\left[f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
|f(x)-B_n(f)(x)| &= \left|\mathbb{E}\left[f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]\right| \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \mathbf{1}_{\left\{\left|x-\frac{S_n}{n}\right|>\varepsilon\right\}}\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \mathbf{1}_{\left\{\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\leq\varepsilon\right\}}\right] \\
&\leq 2\|f\|_{L^\infty}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\left\{\left|x-\frac{S_n}{n}\right|>\varepsilon\right\}}\right] \\
&+ \omega(\varepsilon)\underbrace{\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\left\{\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\leq\varepsilon\right\}}\right]}_{\leq 1}
\end{aligned}$$

$$\text{On a donc: } |f(x)-B_n(f)(x)| \leq 2\|f\|_{L^\infty}\mathbb{P}\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|>\varepsilon\right)+\omega(\varepsilon)$$

On obtient ainsi d'après l'inégalité 1*:*

$$\|f-B_n(f)\|_{L^\infty} \leq \frac{\|f\|_{L^\infty}}{2n\varepsilon^2}+\omega(\varepsilon)$$

Donc, pour tout $\varepsilon>0$*, on a:*

$$\limsup_{n\to+\infty}\|f-B_n(f)\|_{L^\infty} \leq \omega(\varepsilon)$$

$$\text{Donc: } \lim_{n\to+\infty}\|f-B_n(f)\|_{L^\infty}=0$$

3. On sait que:

$$\begin{aligned}
|f(x)-B_n(f)(x)| &\leq \mathbb{E}\left[\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\omega\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sqrt{n}x-\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right|\right)\right]
\end{aligned}$$

D'après la remarque sur la croissance du module de continuité, si $x\in[0,1]$*, alors on a:*

$$\begin{aligned}
|f(x)-B_n(f)(x)| &\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\mathbb{E}\left[1+\sqrt{n}\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right] \\
&\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[1+\sqrt{n}\left\|x-\frac{S_n}{n}\right\|_{L^1}\right]
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a:

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f)(x)| &\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[1 + \sqrt{n}\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_{L^2}\right] \\
&\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[1 + \sqrt{nVar\left(\frac{S_n}{n}\right)}\right] \\
&\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[1 + \sqrt{n\frac{x(1-x)}{n}}\right]
\end{aligned}$$

Il vient ainsi:

$$\|f - B_n(f)\|_{L^\infty} \leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[1 + \frac{1}{2}\right] \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

■

Reférence(s). *C.Zuilly, H.Queffélec, Analyse pour l'agrégation*