

Séminaire de Master 2
-
**Comportement global de N espèces en compétition
avec diffusion forte**



Séminaire encadré par
François CASTELLA

Remerciements

Je remercie François CASTELLA pour son aide et les conseils apportés dans l'encadrement de ce séminaire.

Introduction

L'objet de ce séminaire est l'étude du comportement de N espèces (animales) évoluant dans un milieu naturel, muni d'une unique ressource, ainsi que différents phénomènes naturels observables: naissance et mortalité, dispersion dans le milieu naturel, dépendance de la ressource...

Toutefois, certains phénomènes ayant lieu sur de grandes échelles de temps (naissance, mortalité, dépendance en ressource...) alors que d'autres se déroulent sur des intervalles de temps beaucoup plus petits (dispersion des animaux). Cette différence sera prise en compte, donnant lieu à des systèmes d'équations différentielles et aux dérivées partielles.

L'étude mathématique de ces systèmes fera appel à certains outils, en particulier la décomposition dite *slow-fast*, ou bien encore le théorème de la variété centrale.

Table des matières

Table des matières	2
1 Modèle et résultat principal	3
1.1 Modélisation du problème	3
1.2 Un théorème d'existence et d'unicité	4
2 Étude du système d'EDP	5
2.1 Décomposition en système <i>slow-fast</i>	5
2.2 Le théorème de la variété centrale et ses conséquences	6
2.3 Étude de solutions stationnaires	7
2.4 Le principe d'exclusion compétitif (CEP)	8
3 Simulations numériques	11
3.1 Choix des paramètres	11
3.2 Illustration du CEP	12

Partie 1

Modèle et résultat principal

1.1 Modélisation du problème

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert lisse, borné. On considère le système d'EDP suivant:

$$(S_\varepsilon) : \begin{cases} \frac{\partial R^\varepsilon}{\partial t} = I(x) - \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} f_i(x, R^\varepsilon) V_i^\varepsilon - m_0(x) R^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_x \left(a_0 \vec{\nabla}_x R^\varepsilon \right), x \in \Omega \\ \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \frac{\partial V_i^\varepsilon}{\partial t} = (f_i(x, R^\varepsilon) - m_i(x)) V_i^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_x \left(a_i \vec{\nabla}_x V_i^\varepsilon \right), x \in \Omega \\ \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \vec{n} \cdot \vec{\nabla} R^\varepsilon = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} V_i^\varepsilon = 0, x \in \partial\Omega \\ R^\varepsilon(\cdot, 0) = R^0 \geq 0 \\ \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, V_i^\varepsilon(\cdot, 0) = V_i^0 \geq 0 \end{cases}$$

Où l'on a:

- $R^\varepsilon = R^\varepsilon(x, t)$ est la concentration en ressource en (x, t) .
- $I(x) \geq 0$, non identiquement nulle, est un terme de création de ressources (terme de source).
- $m_0(x)$ est le taux de disparition de la ressource (liée à la sédimentation par exemple).
- $V_i^\varepsilon = V_i^\varepsilon(x, t)$ est la concentration de l'espèce i en (x, t) .
- $m_i(x)$ est le taux de mortalité de l'espèce i (de causes naturelles par exemple).
- $f_i(x, R^\varepsilon) \geq 0$ est le taux de consommation de l'espèce i en fonction de x et de $R^\varepsilon(x, t)$ (chaque espèce se reproduira plus ou moins rapidement en fonction de sa consommation en ressource). On fait l'hypothèse que f_i est croissante en R , de différentielle localement lipschitzienne et est nulle en $R = 0$.
- $\lambda_i \in]0, +\infty[$ est le "rendement" de l'espèce i en fonction de la consommation en ressources (chaque espèce ne consomme pas la même quantité de ressource pour un même niveau de reproduction).
- Pour tout $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $\operatorname{div}_x(a_i \vec{\nabla}_x)$ désigne aussi bien la diffusion (et éventuellement le déplacement) des ressources que celle des populations animales. On prend $a_i \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_+^*)$.
- $\frac{1}{\varepsilon} \in]0, +\infty[$ est le taux de diffusion commun.
- \vec{n} est le vecteur normal à $\partial\Omega$.

Dans ce problème, on étudie le cas $\varepsilon \rightarrow 0$, i.e. $\frac{1}{\varepsilon} \gg 1$. En effet, les phénomènes de diffusion se déroulent sur de courtes échelles de temps (en général durant la journée), tandis que les autres phénomènes, ceux concernant l'évolution démographique de la population en lien avec l'évolution de la quantité de ressource, se déroulent sur de grandes échelles de temps (en général un an, au fil ses saisons).

Remarque. En posant, pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $U_i^\varepsilon(x, t) = \lambda_i^{-1} V_i^\varepsilon(x, t)$, on peut supposer que $\lambda_i = 1$.

1.2 Un théorème d'existence et d'unicité

Théorème (Existence et unicité d'une solution - Admis)

Si $(R^\varepsilon, V_1^\varepsilon, \dots, V_N^\varepsilon)(\cdot, 0) \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})^{N+1}$ est une condition initiale au système (S_ε) dont toutes les composantes sont positives, alors il existe une unique solution $(R^\varepsilon, V_1^\varepsilon, \dots, V_N^\varepsilon) \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[, \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})^{N+1})$ dont toutes les composantes sont positives telle que, pour tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe $M(\varepsilon_0) > 0$ telle que pour tous $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et $t \geq 0$:

$$\|R^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \|U_i^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M(\varepsilon_0)$$

Partie 2

Étude du système d'EDP

2.1 Décomposition en système *slow-fast*

Pour tout $t \geq 0$, le $(N+1)$ -uplet de fonctions $W^\varepsilon(t, \cdot) = (R^\varepsilon(t, \cdot), U_1^\varepsilon(t, \cdot), \dots, U_N^\varepsilon(t, \cdot))^T$ est dans $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})^N$.

Lemme (Décomposition en somme directe)

Soit $|\Omega|$ la mesure de Lebesgue de $|\Omega|$ (finie). Soit $\varphi : \mathcal{C}^0(\Omega)^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ l'application linéaire suivante:

$$\varphi : (f_0, \dots, f_N) \mapsto \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f_0(x) dx, \dots, \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f_N(x) dx \right)$$

En notant $E = \mathbb{R}^{N+1}$ et $F = \ker(\varphi)$, on a cette décomposition en somme directe:

$$\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})^{N+1} = E \oplus F$$

Démonstration. La preuve de ce lemme se fait en notant que, pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$:

$$f = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x) dx + f - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x) dx$$

ce qui donne $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})^{N+1} = E + F$. Pour montrer que cette somme est directe, on considère $f \in E \cap F$. Alors f est de moyenne nulle et est constante, donc $f = 0$. ■

On note alors $X^\varepsilon(\cdot, t) = \Pi_E(W^\varepsilon(\cdot, t))$ et $Y^\varepsilon(\cdot, t) = \Pi_F(W^\varepsilon(\cdot, t))$. Ainsi, $X^\varepsilon(\cdot, t)$ décrit l'évolution des valeurs moyennes de $R^\varepsilon, V_1^\varepsilon, \dots, V_N^\varepsilon$ sur Ω , se déroulant sur de grandes échelles de temps (*slow*), tandis que $Y^\varepsilon(\cdot, t)$ décrit les phénomènes de déroulant sur de courtes échelles de temps (*fast*).

En notant:

$$- K = \text{diag} \left(\text{div}_x(a_0 \vec{\nabla}_x \cdot), \text{div}_x(a_1 \vec{\nabla}_x \cdot), \dots, \text{div}_x(a_N \vec{\nabla}_x \cdot), \right)$$

-

$$\mathcal{F}(x, W^\varepsilon) = \begin{bmatrix} I - m_0 R^\varepsilon - \sum_{i=1}^N V_i^\varepsilon f_i(x, R^\varepsilon) \\ (f_1(x, R^\varepsilon) - m_1) V_1^\varepsilon \\ \vdots \\ (f_N(x, R^\varepsilon) - m_N) V_N^\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$- \mathcal{F}_0(X^\varepsilon, Y^\varepsilon) = \Pi_E \mathcal{F}(x, W^\varepsilon)$$

$$- \mathcal{G}_1(x, X^\varepsilon, Y^\varepsilon) = \Pi_F \mathcal{F}(x, W^\varepsilon)$$

On obtient le système *slow-fast*:

$$(S_\varepsilon^{sf}) : \begin{cases} \frac{\partial X^\varepsilon}{\partial t} = \mathcal{F}_0(X^\varepsilon, Y^\varepsilon) \\ \frac{\partial Y^\varepsilon}{\partial t} = \mathcal{G}_1(x, X^\varepsilon, Y^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} KY^\varepsilon \\ \vec{n} \cdot \vec{\nabla} X^\varepsilon = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} Y^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ X^\varepsilon(\cdot, 0) = \Pi_E(W^\varepsilon(\cdot, 0)) \\ Y^\varepsilon(\cdot, 0) = \Pi_F(W^\varepsilon(\cdot, 0)) \end{cases}$$

2.2 Le théorème de la variété centrale et ses conséquences

Théorème (Théorème de la variété centrale - Admis)

Ils existent $\varepsilon_0 > 0$ et une fonction $h \in \mathcal{C}^1(E \times [0, \varepsilon_0], F)$ tels que:

$$\|h(\cdot, \varepsilon)\|_{L^\infty(E, F)} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(\varepsilon)$$

et, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, le système (S_ε^{sf}) peut-être approché par ce système:

$$(S_\varepsilon^{[\infty]}) : \begin{cases} \frac{dX^{[\infty], \varepsilon}}{dt} = \mathcal{F}_0(X^{[\infty], \varepsilon}, h(X^{[\infty], \varepsilon}, \varepsilon)) \\ Y^{[\infty], \varepsilon} = h(X^{[\infty], \varepsilon}, \varepsilon) \\ \vec{n} \cdot \vec{\nabla} X^{[\infty], \varepsilon} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} Y^{[\infty], \varepsilon} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ X^{[\infty], \varepsilon}(\cdot, 0) = \Pi_E(W^\varepsilon(\cdot, 0)) \\ Y^{[\infty], \varepsilon}(\cdot, 0) = \Pi_F(W^\varepsilon(\cdot, 0)) \end{cases}$$

avec convergence exponentiellement rapide vers la variété centrale, c'est-à-dire que pour toute condition initiale, ils existent $\mu, C > 0$ tels que, pour tout $t \geq 0$:

$$\|Y^\varepsilon(\cdot, t) - h(X^\varepsilon(\cdot, t), \varepsilon)\|_F \leq C e^{-\frac{\mu t}{\varepsilon}}$$

où $\|(u_0, \cdot, u_N)\|_F = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \dots + \|u_N\|_{L^\infty(\Omega)}$

Remarque. Connaître une solution de $S_\varepsilon^{[\infty]}$ revient à connaître une solution de (S_ε^{sf}) (donc de (S_ε)), à une erreur près, qui décroît exponentiellement en temps.

Ainsi, on peut se ramener à l'étude de cette EDO:

$$(S_\varepsilon^c) : \frac{dX^{[\infty], \varepsilon}}{dt} = \mathcal{F}_0(X^{[\infty], \varepsilon}, h(X^{[\infty], \varepsilon}, \varepsilon))$$

et, puisque $\varepsilon \rightarrow 0$, on a cette première approximation, appelée système agrégé :

$$(S_0^c) : \frac{dX^{[0]}}{dt} = \mathcal{F}_0(X^{[0]}, 0)$$

qui se lit explicitement:

$$(S_0^c) : \begin{cases} \frac{dr}{dt} = \tilde{I} - \tilde{m}_0 r - \sum_{i=1}^N \tilde{f}_i(r) u_i \\ \frac{du_i}{dt} = (\tilde{f}_i(r) - \tilde{m}_i) u_i \quad i \in \llbracket 1, N \rrbracket \end{cases}$$

Avec:

$$\tilde{I} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} I(x) dx, \quad \tilde{m}_0 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} m_0(x) dx$$

et, pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\tilde{m}_i = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} m_i(x) dx, \quad \tilde{f}_i(r) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f_i(x, r) dx$$

Ce système décrit la variation moyenne de ressources et de chaque population i (en première approximation, i.e. si $\varepsilon \rightarrow 0$).

2.3 Etude de solutions stationnaires

Définition

On définit $r_0^* = \frac{\tilde{I}}{\tilde{m}_0}$ et, comme, pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, \tilde{f}_i est croissante, on pose:

$$r_i^* = \begin{cases} \tilde{f}_i^{-1}(\tilde{m}_i) & \text{si } \lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{f}_i(r) > \tilde{m}_i \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose également:

- $p_0^* := (r_0^*, 0, \dots, 0)$
- Si $r_0^* > r_i^*$, $p_i^* := (r_0^*, 0, \dots, 0, u_i^*, 0, \dots, 0)$, où $u_i^* := \frac{\tilde{m}_0}{\tilde{m}_i}(r_0^* - r_i^*) > 0$.

Proposition (Stabilité des solutions stationnaires de (S_0^c))

- Si, pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $r_0^* < r_i^*$, alors le système (S_0^c) admet pour unique solution stationnaire positive le $(N+1)$ -uplet p_0^* , qui est asymptotiquement stable.
- Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. On suppose que $r_i^* < r_0^*$ et, pour tout $j \in \llbracket 0, N \rrbracket \setminus \{i\}$, $r_i^* < r_j^*$. Alors le système (S_0^c) admet pour unique solution stationnaire positive le $(N+1)$ -uplet p_i^* , qui est asymptotiquement stable.
- Si, pour tout $i \neq j$, $r_i^* \neq r_j^*$, et $r_i^* < r_0^*$ pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, alors le système (S_0^c) a exactement $N+1$ solutions stationnaires positives qui sont les p_i^* , pour $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$. De plus, exactement l'une d'entre elles est stable, c'est $p_{i_0}^*$, où $r_{i_0}^* = \min(r_0^*, \dots, r_N^*)$.

Démonstration (idée). On peut prouver cette proposition (au moins la partie concernant la stabilité) en utilisant le théorème de stabilité en première approximation, ce qui se fait via l'étude de la différentielle de la fonction:

$$F : (r, u_1, \dots, u_N) \mapsto \begin{bmatrix} \tilde{I} - \tilde{m}_0 r - \sum_{i=1}^N \tilde{f}_i(r) u_i \\ (\tilde{f}_1(r) - \tilde{m}_1) u_1 \\ \vdots \\ (\tilde{f}_N(r) - \tilde{m}_N) u_N \end{bmatrix}$$

donnée par:

$$dF(r, u_1, \dots, u_N) = \begin{bmatrix} -\tilde{m}_0 - \sum_{i=1}^N \tilde{f}_i'(r) u_i & -\tilde{f}_1(r) & \cdots & \tilde{f}_N(r) \\ \tilde{f}_1'(r) u_1 & \tilde{f}_1(r) - \tilde{m}_1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ \tilde{f}_N'(r) u_N & (0) & & \tilde{f}_N(r) - \tilde{m}_N \end{bmatrix}$$

Par exemple, on observe que:

$$dF(p_0^*) = \begin{bmatrix} -\tilde{m}_0 & & & (*) \\ \tilde{f}_1(r_0^*) - \tilde{m}_1 & & & \\ & \ddots & & \\ (0) & & & \tilde{f}_N(r_0^*) - \tilde{m}_N \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de $dF(p_0^*)$ sont toutes négatives, ce qui donne la stabilité asymptotique de p_0^* . ■

Théorème (Stabilité des solutions stationnaires de (S_ε))

Ils existent $C, \varepsilon_0 > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$:

- Si, pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $r_0^* < r_i^*$, alors le système (S_ε) admet pour unique solution stationnaire positive le $(N + 1)$ -uplet $W_0^\varepsilon(x) = (R_0^\varepsilon(x), 0, \dots, 0)$, qui est stable et vérifie:

$$\|R_0^\varepsilon - r_0^*\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\varepsilon$$

- Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. On suppose que $r_i^* < r_0^*$ et, pour tout $j \in \llbracket 0, N \rrbracket \setminus \{i\}$, $r_i^* < r_j^*$. Alors le système (S_ε) admet (au moins) une solution stationnaire positive $W_i^\varepsilon(x) = (R_i^\varepsilon(x), 0, \dots, 0, U_i^\varepsilon(x), 0, \dots, 0)$ qui est stable et vérifie:

$$\|R_i^\varepsilon - r_i^*\|_{L^\infty(\Omega)} + \|U_i^\varepsilon - u_i^*\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\varepsilon$$

- Si, pour tout $i \neq j$, $r_i^* \neq r_j^*$, et $r_i^* < r_0^*$ pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, alors le système (S_ε) a exactement $N + 1$ solutions stationnaires positives qui sont les W_i^ε , pour $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$. De plus, exactement l'une d'entre elles est stable, c'est $W_{i_0}^\varepsilon$, où $r_{i_0}^* = \min(r_0^*, \dots, r_N^*)$.

Démonstration (idée). On donne les grandes lignes de la démonstration:

- Faire le lien entre la stabilité des solutions stationnaires de (S_0^c) et (S_ε^c) , puis S_ε^{sf} en appliquant le théorème des fonctions implicites à la fonction $(X, \varepsilon) \mapsto \mathcal{F}_0(X, h(X, \varepsilon))$, ce qui montre que, localement (autour de $\varepsilon = 0$), les solutions stationnaires de (S_ε^c) varient en fonction de ε (de manière \mathcal{C}^1), et la stabilité reste inchangée, ce qui permet ensuite d'étudier la stabilité des solutions stationnaires de (S_ε^{sf}) en utilisant le théorème de la variété centrale.
- Faire le lien entre les solutions stationnaires de (S_ε^{sf}) et (S_ε) en notant que, si $(p^\varepsilon, h(p^\varepsilon, \varepsilon))$ est une solution stationnaire de S_ε^{sf} , alors $p^\varepsilon + h(p^\varepsilon, \varepsilon)$ est une solution stationnaire de (S_ε) .



Remarque. Connaître la dynamique des solutions du système (S_0^c) permet de connaître celle des solutions du système S_ε lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.4 Le principe d'exclusion compétitif (CEP)

On appelle Principe d'Exclusion Compétitif (CEP, de l'anglais *Competitive Exclusion Principle*) le fait qu'une ou plusieurs espèces s'éteignent à la suite de leur compétition avec d'autres espèces pour une unique ressource.

On fait les hypothèses suivantes:

- Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on a $\tilde{m}_i = \tilde{m}_0 > 0$
- Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\tilde{f}_i(r) = \frac{c_i r}{k_i + r}$ où c_i et k_i sont des constantes positives.

Proposition (CEP pour le système (S_0^c) - Admis)

Supposons les hypothèses précédentes vérifiées. Soit $(r(t), u_1(t), \dots, u_N(t))$ une solution de (S_0^c) dont les conditions initiales sont positives. On définit l'ensemble:

$$J = \{0\} \cup \{j \in \llbracket 1, N \rrbracket : u_j(0) > 0, r_j^* < r_0^*\}$$

et le nombre $\hat{r} = \min_{j \in J} (r_j^*)$. On a:

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = \hat{r}$ et, pour tout $i \notin J$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_i(t) = 0$
- Si, pour $j_1 \in J \setminus \{0\}$, on a $r_{j_1}^* < r_{j_1}^*$ pour tout $j \in J \setminus \{j_1\}$, alors:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_{j_1}(t) = u_{j_1}^* \text{ et } \forall j \in J \setminus \{0, j_1\}, \lim_{t \rightarrow +\infty} u_j(t) = 0$$

On fait ces hypothèses supplémentaires:

- Pour tous $i \in \llbracket 1, N \rrbracket, x \in \Omega$, on a $\tilde{m}_i(x) = \tilde{m}_0(x) > 0$
- Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket, f_i(x, R) = \frac{C_i(x)R}{k_i + R}$, où k_i est une constante positive. On a alors $\tilde{f}_i(r) = \frac{c_i r}{k_i + r}$ avec:

$$c_i = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} C_i(x) dx$$

On introduit également le quadrant positif de $C^0(\bar{\Omega})^{N+1}$ par:

$$Q = \{V \in C^0(\bar{\Omega}) : \forall x \in \bar{\Omega}, V(x) \geq 0\}^{N+1}$$

Théorème (CEP pour le système (S_ε))

Supposons les hypothèses précédentes vérifiées. Pour tout $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$, notons $W_i^\varepsilon(x)$ la solution stationnaire de (S_ε) introduite au théorème précédent. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, et pour toute condition initiale $W^\varepsilon(\cdot, 0) \in Q$, on a les propriétés suivantes:

- Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Si $r_i^* > r_0^*$, alors:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|U_i^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$$

- Supposons que pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket, r_0^* < r_i^*$. Alors toute solution $W^\varepsilon(x, t)$ de (S_ε) vérifie:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|W^\varepsilon(\cdot, t) - W_0^\varepsilon\|_{L^\infty} = 0$$

- Supposons que pour tout $i \neq 1, r_1^* < r_i^*$. Alors toute solution $W^\varepsilon(x, t)$ de (S_ε) avec condition initiale positive vérifiant $U_1^\varepsilon(x, 0) > 0$ pour un certain $x \in \Omega$ vérifie:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|W^\varepsilon(\cdot, t) - W_1^\varepsilon\|_{L^\infty} = 0$$

Démonstration (idée). On donne les grandes lignes de la démonstration:

- On utilise le théorème donné en première partie affirmant que si $W^\varepsilon(\cdot, 0) \in Q$ est une condition initiale au système (S_ε) , alors il existe une unique solution $W \in C^1(]0, +\infty[, Q)$, et, pour tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe $M(\varepsilon_0) > 0$ telle que pour tous $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et $t \geq 0$:

$$\|R^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \|U_i^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M(\varepsilon_0)$$

Ce qui permet de montrer la positivité de la solution stationnaire.

- On compare avec les solutions du système $(S_\varepsilon^{[\infty]})$ via les estimations d'erreur dans le théorème de la variété centrale, ce qui montre la première propriété.
- Les deux propriétés suivantes se montrent en étudiant le passage de (S_0^c) à (S_ε^{sf}) puis (S_ε) , en montrant que la convergence souhaitée est conservée.

■

Remarque. Concrètement, ce dernier résultat implique deux phénomènes:

- D'abord, si une espèce a besoin de plus de ressource pour se reproduire qu'il ne peut se régénérer, alors cette espèce s'éteindra.
- Ensuite, si plusieurs espèces ont besoin de moins de ressource pour se reproduire qu'il ne peut se régénérer, alors une seule espèce survivra: c'est celle qui sera la plus économe en ressource pour se reproduire.

Partie 3

Simulations numériques

On va illustrer le principe d'exclusion compétitif via des simulations numériques (systèmes (S_0^c) et (S_ε)).

3.1 Choix des paramètres

On simule le système d'EDP sur le cercle \mathbb{S}^1 (ce qui est plus simple à simuler numériquement, on pose des conditions périodiques au bord). On fait des simulations numériques avec $N = 3$ espèces, en utilisant ces paramètres:

- $\varepsilon = 10^{-3}$
- I est constante égale à 1.
- $m_0 = \dots = m_N$ est une fonction constante égale à 1.
- $a_0 = \dots = a_N$ est une fonction constante égale à 1.
- Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, la fonction f_i est donnée, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ par:

$$f_i(r) = \frac{c_i r}{k_i + r}$$

où $c_i > m_i$ et $k_i > 0$ sont des constantes. On a ainsi $r_0^* = 1$ et pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$r_i^* = \frac{m_i k_i}{c_i - m_i} = \frac{k_i}{c_i - 1}$$

- Pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} R^\varepsilon(x, 0) &= e^{-20(x-0.5)^2} \\ U_1^\varepsilon(x, 0) &= e^{-100(x-0.25)^2} \\ U_2^\varepsilon(x, 0) &= e^{-100(x-0.5)^2} \\ U_3^\varepsilon(x, 0) &= e^{-100(x-0.75)^2} \end{aligned}$$

Ces fonctions sont considérées comme nulles en $x \in \{0, 1\}$, ce qui coïncide bien avec les conditions périodiques.

- La durée de simulation est $T = 10$

3.2 Illustration du CEP

Tout d'abord, on illustre la seconde propriété du théorème portant sur le CEP pour le système (S_ε) . On fait ces choix de paramètres:

```
c1 = 1.5;
k1 = 1;
c2 = 1.2;
k2 = 1;
c3 = 1.3;
k3 = 1;
```

On obtient ces valeurs pour $r_0^*, \dots, r_N^*, u_1^*, \dots, u_N^*$ (les valeurs négatives de u_i^* ne sont pas à prendre en compte) ainsi que les valeurs finales de R, U_1, \dots, U_N , tant avec (S_ε) que (S_0^c) :

"r0*= 1"	"r0*= 1"
"r1*= 2"	"r1*= 2"
"r2*= 5"	"r2*= 5"
"r3*= 3.3333333"	"r3*= 3.3333333"
"u1*= -1"	"u1*= -1"
"u2*= -4"	"u2*= -4"
"u3*= -2.3333333"	"u3*= -2.3333333"
"max R(T, .) = 0.9864459"	"r(T) = 0.9597667"
"max U1(T, .) = 0.0082534"	"u1(T) = 0.0234511"
"max U2(T, .) = 0.0020492"	"u2(T) = 0.0067227"
"max U3(T, .) = 0.0032484"	"u3(T) = 0.0101957"

Ce qui conduit à une extinction de toutes les espèces, comme le confirment ces simulations:

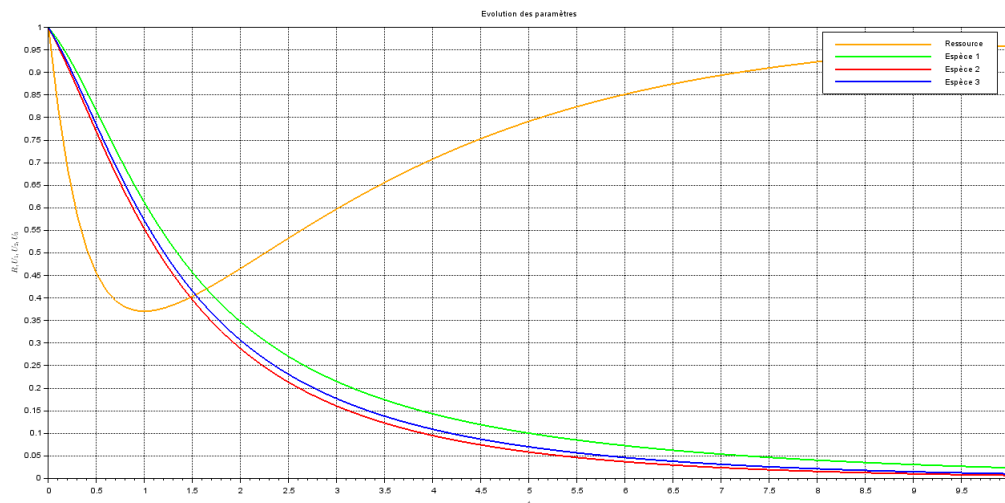


Figure 3.1: Simulation du système (S_0^c) .

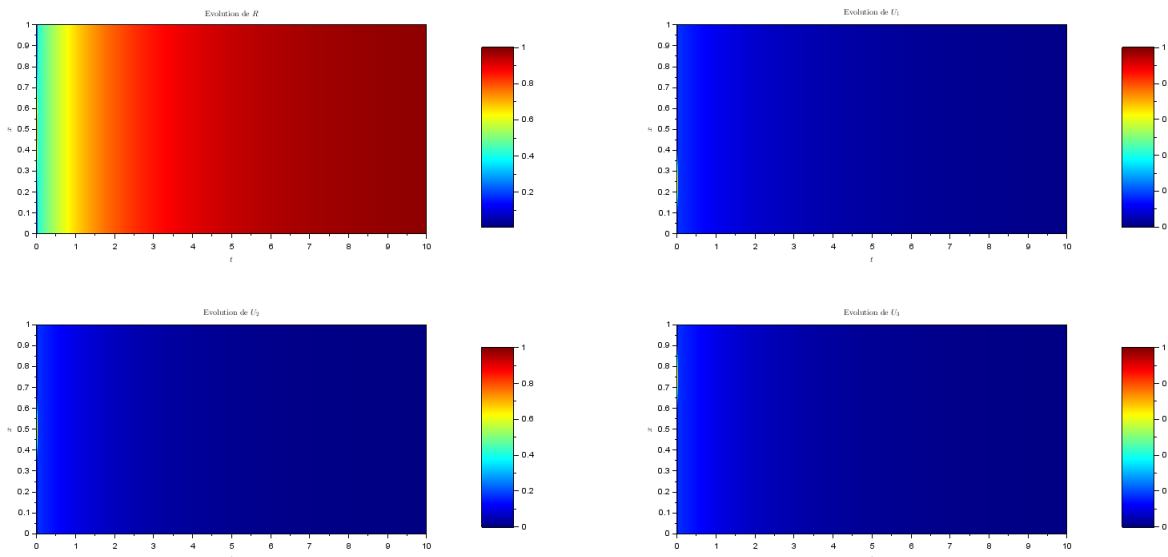


Figure 3.2: Simulation du système (S_ε) .

De plus, on illustre la troisième propriété du théorème portant sur le CEP pour le système (S_ε) . On fait ces choix de paramètres:

```

c1 = 5;
k1 = 1;
c2 = 2;
k2 = 1;
c3 = 3;
k3 = 1;
    
```

On obtient ces valeurs pour $r_0^*, \dots, r_N^*, u_1^*, \dots, u_N^*$ (les valeurs négatives de u_i^* ne sont pas à prendre en compte) ainsi que les valeurs finales de $R, U1, \dots, U_N$, tant avec (S_ε) que (S_0^c) :

"r0*= 1"	"r0*= 1"
"r1*= 0.25"	"r1*= 0.25"
"r2*= 1"	"r2*= 1"
"r3*= 0.5"	"r3*= 0.5"
"u1*= 0.75"	"u1*= 0.75"
"u2*= 0"	"u2*= 0"
"u3*= 0.5"	"u3*= 0.5"
"max R(T, .) = 0.2517932"	"r(T) = 0.2537463"
"max U1(T, .) = 0.739857"	"u1(T) = 0.7290532"
"max U2(T, .) = 0.0007632"	"u2(T) = 0.0021844"
"max U3(T, .) = 0.0075835"	"u3(T) = 0.0151523"

Ce qui conduit à une extinction de toutes les espèces sauf une, la 1, qui a un r^* égal à 0.25, le plus faible des r_i^* (pourtant tous inférieurs à 1) comme le confirment ces simulations:

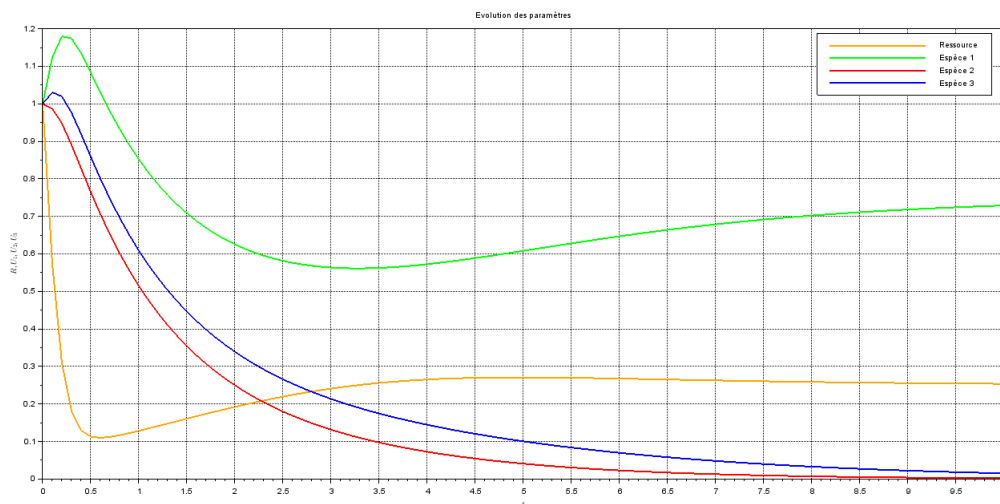


Figure 3.3: Simulation du système (S_0^c) .

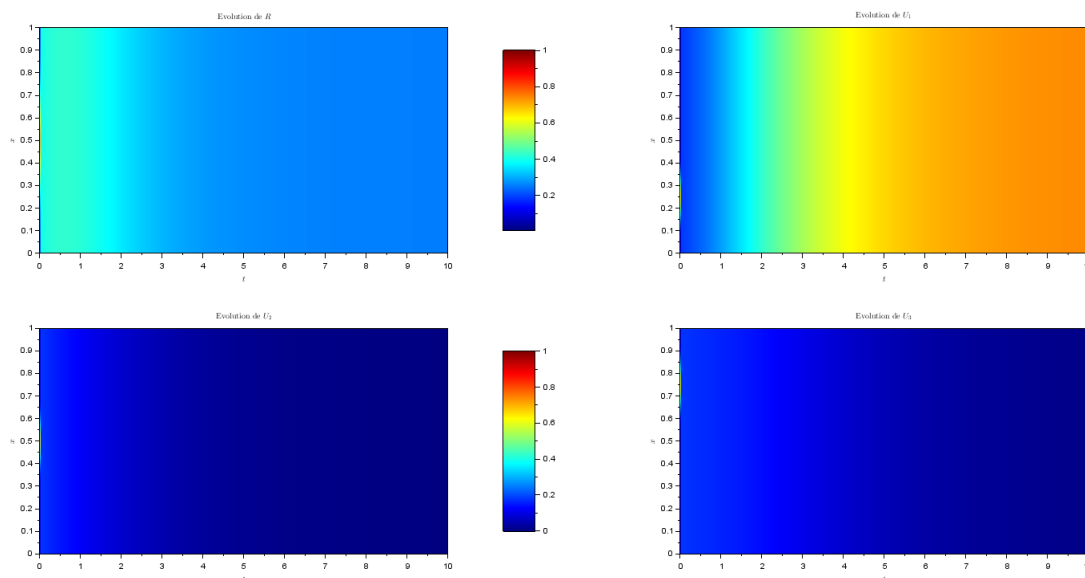


Figure 3.4: Simulation du système (S_ε) .

Remarque. Sur les deux simulations du système (S_ε) , la diffusion n'est que très peu, voire pas du tout visible tant elle est rapide (seulement tout à gauche de chaque graphique, on peut voir l'allure gaussienne de chaque condition initiale).

Bibliographie

F.Castella, S.Madec et Y.Lagadeuc, *Global behavior of N competing species with strong diffusion: diffusion leads to exclusion*, 2010 **Mathematics Subject Classification** 35J55, 35J61, 92D40.