Oral blanc Analyse-Probabilités 1
-
Rapport

Introduction

Ce document à pour objectifs de faire un compte-rendu des questions posées durant l'entretien au sujet du développement puis du plan ainsi que des remarques et commentaires généraux du jury au sujet de la prestation, afin de voir quelles sont les attentes du jury lors d'un oral (blanc).

L'oral s'est déroulé de la manière suivante (comme n'importe quel autre oral, sauf en modélisation): trois heures de préparation d'un plan (sur une "cartouche") sur l'une des deux leçons choisies, mais aussi pour revoir les deux développements. J'ai personnellement consacré 2h30 à rédiger le plan et 30 min à revoir mes développements (15 min par développement). Ensuite l'oral à proprement parler dure une heure, face à un jury de trois personnes (c'était comme ça à l'ENS Rennes en 2020): 6 min de défense de plan (une présentation de ce que l'on a écrit sur la cartouche en insistant sur ls points importants), puis le jury choisit un des deux développements proposés, puis on a 15 min pour présenter le développement choisi. Le reste du temps est consacré à des questions sur le développement, puis sur le plan. Ensuite, un ou plusieurs exercices sont proposés afin de tester le niveau du candidat.

1 - Choix de la leçon

Le couplage proposait le choix entre ces deux leçons:

- Leçon 205: Espaces complets. Exemple et applications
- Leçon 226: Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

J'ai choisi de présenter la première leçon.

2 - La présentation de la leçon

a - La défense de plan

J'ai découpé le plan en trois parties:

1. Espaces métriques complets
2. Espaces de Banach
3. Espaces de Hilbert

J'ai noté le titre de chaque partie au tableau au fur et à mesure que je l'abordais. J'ai également donné une illustration d'une suite de Cauchy. Ma défense de plan ayant duré plus de 7 minutes, j'ai visiblement trop détaillé le début, et survolé la dernière sous-partie.

b - Le développement

J'avais préparé les deux développements suivants pour cette leçon:

- Théorème de Riez-Fischer
- Théorèmes du point fixe et de Cauchy-Lipschitz globalement lipschitzien

C'est le premier développement qui a été choisi par le jury. La restitution au tableau du développement sans notes s'est bien passé, si l'on excepte le fait que j'ai du donner le dernier argument oralement puisque les 15 minutes étaient dépassées.

3 - Entretien avec le jury

Les questions ne sont pas forcément dans l'ordre telles que posées par le jury. Ce rapport ayant été rédigé quelques mois après, il est possible que j'en ai oublié certaines.

a - Questions sur le développement

Question: Lorsque vous dites que $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$ presque sûrement avec $g \in L^p(X)$, pouvez-vous me dire pourquoi $g \in L^p(X)$? (voir développement sur le Théorème de Riez-Fischer)

Réponse attendue: On utilise le théorème de convergence monotone (ou de Beppo-Levi).

En réalité, j'ai un peu "perdu pied" en donnant cette réponse:

Réponse donnée: L'inégalité de Minkowski assure que $g \in L^p(X)$, mais cette inégalité est valide seulement pour une somme finie de fonctions de $L^p(X)$.

Question: Et au niveau de la convergence de la somme donnée par la fonction $g(x)$, que peut-on dire au niveau de la convergence de la série numérique ?

Idée de réponse: On utilise le fait que $\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2^n}$, ce qui implique que si la série numérique $g_n(x)$ ne converge pas, alors sa norme L^p va tendre vers l'infini (série croissante), ce qui est absurde, puisque l'on a la majoration:

$$\|g_n\|_{L^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leqslant 1$$

Il m'a fallu du temps pour répondre correctement à cette question (le jury m'a guidé).

Question: Vous avez dit au tout début de votre développement que l'espace $L^p(X)$ était l'espace des fonctions de norme L^p finie, maintenez-vous cette réponse ?

Réponse: Après avoir affirmé que je maintenais ma réponse, puis un moment de réflexion, j'ai modifié la réponse en quelque chose comme ceci: $L^p(X)$ est l'espace vectoriel des fonctions de norme L^p finie, quotienté par la relation d'équivalence $\mu-$presque partout, puisque sinon on n'a pas de norme L^p (perte de la propriété de séparation). Je pense que le jury a remarqué que j'avais d'abord maintenu ma réponse sous le coup du stress...

b - Questions sur le plan

Question: Pouvez-vous me donner les grandes lignes de la démonstration de la propriété suivante:

$(E, \|\cdot\|)$ est un Banach ssi pour toute série $\sum_{n\geqslant 0} u_n, \sum_{n\geqslant 0} \|u_n\|$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge

Réponse: Pour le sens direct, on considère une série absolument convergente. Pour $n > p$, on a la majoration suivante:

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{p} u_k \right\| \leqslant \sum_{k=p}^{n} \|u_k\|$$

La suite $\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans E, qui est complet, donc elle converge.

Pour le sens réciproque, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans E. On peut donc trouver une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \leqslant \frac{1}{2^n}$. On a, pour $n > p$, la majoration suivante:

$$\|u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(p)}\| \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} \|u_{\varphi(k+1)} - u_{\varphi(k)}\| \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{2^k} \leqslant 2$$

Donc la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\right)$ converge, ce qui donne la convergence de la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. C'est une suite extraite d'une suite de Cauchy qui converge, donc elle converge.

Question: Comment est choisie l'extraction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$?

Réponse: On construit la suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ récursivement.

Question: Connaissez-vous une application de ce résultat ?

Réponse: Lorsque l'on définit l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

on justifie la convergence de cette série par son absolue convergence pour une norme subordonnée $|||\cdot|||$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|||A|||^k}{k!} < +\infty$$

Question: Et en dimension infinie ?

Réponse: A priori non.

Réponse attendue: C'est cette idée qui est reprise dans la démonstration du théorème de Riez-Fischer.

Question: Vous parlez du théorème du point fixe et de son application à la théorie des équations différentielles, mais connaissez-vous une autre application ?

Réponse: Oui, en analyse numérique matricielle, lorsque l'on veut résoudre un système linéaire $Ax = b$ (avec A inversible). On décompose A en $A = M - N$, avec N inversible facile à inverser. On construit ainsi la suite $(x_k)_k$ donnée par un élément x_0 puis par $x_{k+1} = N^{-1}Mx_k + N^{-1}b$. Si on a $\rho(N^{-1}M) < 1$ (rayon spectral), alors la suite $(x_k)_k$ converge vers l'unique point x vérifiant $x = N^{-}Mx + N^{-1}b$, à savoir $Ax = b$, qui est la solution voulue. Ce principe est à la base des méthodes itératives comme celles de Gauss-Seidel ou de Jacobi.

Question: Pouvez-vous décrire le problème aux limites $-u'' = f$ avec l'espace de Sobolev $H_0^1(0,1)$?

Réponse: Il s'agit de considérer le problème elliptique suivant:

$$-u'' = f$$

Au sens des distributions. On a alors, pour tout $v \in \mathcal{D}'(0,1)$,

$$\begin{aligned} -\int_0^1 u''(x)v(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x \\ \int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Comme $H_0^1(0,1) = \overline{\mathcal{D}(0,1)}^{H^1}$, on peut considérer ce problème pour tout $v \in H_0^1(0,1)$. On utilise alors le théorème de représentation de Riez grâce à la symétrie du produit scalaire:

$$(u,v) \longmapsto \int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x$$

Un erreur s'est glissée au niveau des hypothèses concernant le second problème aux limites.

Question: Connaissez-vous un exemple d'espace non complet ?

Réponse: L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$.

Question (suite): Et en dimension infinie par exemple ?

Réponse (suite): L'espace $\left(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^1}\right)$ des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^1}$.

Question: Pouvez-vous me donner le complété de cet espace ?

Réponse: L'espace $L^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^1}$.

Question: Avez-vous une idée de la manière dont on le démontre ?

Réponse attendue: On sait que les fonctions continues à support compact dans $]0,1[$ sont denses dans $L^1([0,1])$ pour la norme L^1, donc cela donne en particulier une approximation d'une fonction de $L^1([0,1],\mathbb{R})$ par une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ en norme $\|\cdot\|_{L^1}$, ce qui fournit une preuve. Le fait de ne pas avoir su répondre à cette question n'a probablement pas été pénalisé, la notion de complété n'étant pas au programme de l'agrégation, et ne figurant pas dans le plan (c'est le jury qui en a parlé en premier).

Question: Connaissez-vous une application du théorème d'isomorphisme de Banach ?

Réponse: Oui, concernant les séries de Fourier, et plus particulièrement la "transformée de Fourier":

$$TF : \begin{array}{ccc} L^1_{2\pi} & \longrightarrow & c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \\ f & \longmapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

où $L^1_{2\pi}$ est l'espace des fonctions intégrables sur $[0, 2\pi]$, $2\pi-$périodiques muni de la norme L^1 sur $[0, 2\pi]$ et $c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ est l'espace des suites sur $\mathbb{Z}$ de limite nulle lorsque $|n| \longrightarrow +\infty$, muni de la norme l^∞. Les deux espaces munis de leurs normes respectives sont complets. On sait que TF est injective, mais on veut montrer qu'elle n'est pas surjective. Raisonnons par l'absurde en supposant que ce soit le cas. TF est alors bijective. Par définition des coefficients de Fourier, on, pour $f \in L^1_{2\pi}$ la majoration:

$$\|(c_n(f))_n\|_{l^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1}$$

avec:

$$\|f\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\mathrm{d}t$$

Donc TF est continue. Par le théorème d'isomorphisme de Banach, TF est un isomorphisme, i.e. il existe $C > 0$ telle que pour toute $f \in L^1_{2\pi}$,

$$\|f\|_{L^1} \leqslant C\|(c_n(f))_n\|_{l^\infty}$$

Si on prend pour f le noyau de Dirichlet $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$, alors la suite de ses coefficients de Fourier est majorée (en module) par 1 (ils valent 0 ou 1), donc:

$$\|D_n\|_{L^1} \leqslant C \tag{1}$$

Or, on a $\|D_n\|_{L^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (lien avec l'intégrale de Dirichlet), ce qui est absurde et contredit (1). Donc TF n'est pas surjective.

Question: Connaissez-vous d'autres applications de la complétude en analyse fonctionnelle ?

Réponse: J'ai répondu non, mais je ne voyais pas vraiment l'utilité de cette question, peut-être avoir des théorèmes plus importants ? Ou bien des applications ?

c - Exercice

L'exercice suivant m'a été posé:

Soit E l'espace vectoriel des suites convergentes $(x_n)_n$ telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_{n+1} - x_n| < +\infty$. Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} \| \cdot \|_{CV} : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x_n)_n & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} |x_{n+1} - x_n| \end{array}$$

1. Montrer que E est bien défini.
2. Montrer que $\| \cdot \|_{CV}$ est une norme sur E.
3. Montrer que $(E, \| \cdot \|_{CV})$ est complet.

Seules les deux premières questions (triviales) ont été traitées, mais pas la troisième faute de temps.

4 - Bilan de l'oral

L'oral a été plutôt bien réussi malgré quelques points améliorables:

- Le plan comporte plein de théorèmes (Baire, Banach-Steinhauss...) mais manque d'applications "importantes", ce qui est normal en janvier (on a le recul plus tard), peut-être un lien avec la dernière question posée ?
- Les questions concernant le développement montrent un "manque" de recul concernant le développement. C'est bien de le travailler d'avantage et de voir les points non démontrés dans les livres (je pensais personnellement que le point en question était évident...)
- L'exercice aurait pu être traité en faisant rapidement les deux premières questions puis en se concentrant sur la troisième
- La défense de plan a pris 7 minutes, ce qui est trop. C'est bien d'avoir fait un schéma d'une suite de Cauchy au tableau, ce qui donne une certaine valeur ajoutée, mais il aurait pu être plus précis.

Malgré ces points négatifs, le niveau de l'oral est relativement correct, avec une note finale de 12/20.