Théorème de Riez-Fischer

Leçons 201-205,208,234,241

Théorème (**Théorème de Riez-Fischer**)

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty]$. Alors $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p}$ est un espace vectoriel normé complet (ou espace de Banach)

Remarque. *Les fonctions sont ici supposées à valeurs réelles ou complexes (voire dans un espace de Banach), sur* $X \backslash N$ *où* N *est un ensemble négligeable* ($\mu(N) = 0$)

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer le cas $p = \infty$ en montrant qu'une suite de Cauchy converge
2. Montrer le cas $p < \infty$ en montrant qu'une suite de Cauchy admet une suite extraite convergente, et ce au moyen d'une série télescopique et du théorème de convergence dominée

Démonstration. *1. Supposons que* $p = \infty$. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(X)^{\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy. Ainsi, par définition:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N_\varepsilon, \|f_n - f_m\|_{L^\infty} < \varepsilon$$

ou encore:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N_k, \|f_n - f_m\|_{L^\infty} < \frac{1}{k}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, *il existe* $N_k \in \mathbb{N}$, E_k *négligeable tel que pour tous* $n, m \geq N_k$, $x \in X \backslash E_k$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}$

On pose:

$$E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} E_k$$

Par sous-additivité de la mesure μ, E *est aussi négligeable et on obtient ainsi que pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, *il existe* $N_k \in \mathbb{N}$, *tel que pour tous* $n, m \geq N_k$, $x \in X \backslash E$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}$

Donc, pour tout $x \in X \backslash E$, *la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy (dans l'espace d'arrivée des fonctions, complet), donc converge, vers une limite notée* $f(x)$.

Montrons alors que $f \in L^\infty(X)$. *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$ *fixé:*

$$\forall n, m \geq N_k, \forall x \in X \backslash E \quad , \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k} \tag{1}$$

Passons à la limite dans 1, on obtient:

$$\forall n \geq N_k, \forall x \in X \backslash E \quad , \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

Donc:

$$\forall x \in X \backslash E, \forall n \geq N_n \quad , \quad |f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)|$$

Donc $f \in L^\infty(X)$ et on a:

$$\|f_n - f\|_{L^\infty} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. *Supposons que $p \in [1, +\infty[$ Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^p(X)^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Montrons que cette suite de Cauchy admet une sous-suite qui converge dans L^p. On sait que l'on peut trouver une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que:*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^n}$$

On pose:

$$\forall x \in X, g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left| f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x) \right|$$

Par l'inégalité de Minkowski, on a: $\|g_n\|_{L^p} \leq 1$. De plus, par le théorème de convergence monotone (ou de Beppo-Levi), on obtient que, μ-presque partout sur X:

$$g_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} \left| f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x) \right| := g(x)$$

avec $g \in L^p(X)$. Donc, pour μ-presque tout $x \in X$, $m > n \geq 2$:

$$\left| f_{\varphi(m)}(x) - f_{\varphi(n)}(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \left| f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x) \right| \leq g(x) - g_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc, pour μ-presque tout $x \in X$, $(f_{\varphi(n)}(x))$ est de Cauchy dans l'espace d'arrivée (complet), donc est convergente, vers une limite notée $f(x)$.

Montrons alors que $f \in L^p(X)$. D'après l'inégalité précédente, on a, pour μ-presque tout $x \in X$:

$$\left| f_{\varphi(m)}(x) - f_{\varphi(n)}(x) \right| \quad \leq \quad g(x) \tag{2}$$

Ainsi, dans l'inégalité 2, si $n \longrightarrow +\infty$, on obtient, pour μ-presque tout $x \in X$:

$$\left|f_{\varphi(m)}(x) - f(x)\right| \leq g(x)$$

Ainsi, puisque l'on a:

$$|f| \leq \left|f_{\varphi(n)} - f\right| + \left|f_{\varphi(n)}\right| \leq g + \left|f_{\varphi(n)}\right|$$

et que $g + \left|f_{\varphi(m)}\right| \in L^p(X)$, on a $f \in L^p(X)$.

On a ainsi, pour μ-presque tout $x \in X$,

$$\left|f_{\varphi(m)} - f\right| \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

La suite de fonctions en question étant majorée indépendamment de m par $g \in L^p(X)$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure que:

$$\|f_{\varphi(m)} - f\|_{L^p} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3}$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite convergente, donc est elle-même convergente, ce qui termine la démonstration.

■

Remarque. 1. *Si $p < \infty$, La norme $\|\cdot\|_{L^p}$ en question est donnée par:*

$$\begin{aligned} \forall f \in L^p(X) \quad &, \quad \|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } p < \infty \\ \forall f \in L^\infty(X) \quad &, \quad \|f\|_{L^\infty} = \sup_X |f| \text{ si } p = \infty \end{aligned}$$

2. *Le théorème montre aussi que si $\|f_n - f\|_{L^p} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy), alors la convergence est aussi presque-sûre à extraction près.*

Reférence(s). *H. Brezis, Analyse Fonctionnelle*